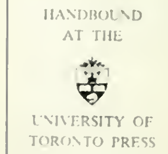
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01206112 3


HANDBOUND
AT THE
UNIVERSITY OF
TORONTO PRESS









THEORIE UND ANWENDUNG

DER

DETERMINANTEN

VON

DR. RICHARD BALTZER

OBERLEHRER AM STÄDTISCHEN GYMNASIUM ZU DRESDEN, MITGLIED DER K. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG

ZWEITE VERMEHRTE AUFLAGE

LEIPZIG

VERLAG VON S. HIRZEL

1864.

12011
12|1|91



Vorrede

zur ersten Auflage.

Das mächtige Instrument der Algebra und Analysis, welches unter dem Namen der Determinanten in Gebrauch gekommen ist, war aus den bis vor wenig Jahren vorhandenen Quellen nicht leicht kennen zu lernen. Die grossen Meister hatten jenes Hülfsmittel für die höheren Zwecke, denen ihr Genius diente, sich geschaffen und waren wenig gesonnen, ihren Bau durch Betrachtungen über Material und Werkzeug, von deren Tüchtigkeit sie tiefe Ueberzeugung hatten, aufzuhalten. Daher ist es mit den Determinanten wie wohl mit allen wichtigen Instrumenten der Mathematik ergangen, dass sie längere Zeit im Besitz von wenig Auserwählten blieben, bevor eine geordnete Theorie derselben den Nichtkennern das Verständniss und den Gebrauch zugänglicher machte. Die erste Idee, der Algebra durch Bildung combinatorischer Aggregate, die heute Determinanten genannt werden, zu Hülfe zu kommen, rührt, wie Herr Professor Dirichlet bemerkt hat, von Leibniz her. Ausser dem Briefe an L'Hospital 1693 April 28, worin Leibniz die Ueberzeugung von der Fruchtbarkeit seines Gedankens ausspricht, scheint aber nichts übrig zu sein, woraus sich schliessen liesse, dass Leibniz sich um weitere Früchte dieser Idee bemüht habe. Die zweite Erfindung der Determinanten durch Cramer 1750 blieb unverloren wegen der Dienste, die der Algebra daraus erwuchsen theils durch Cramer selbst, theils nach einer Reihe von Jahren durch Bezout, Vandermonde, Laplace, Lagrange. Namentlich war es Vandermonde (sur l'élimination 1771), der einen Algorithmus der Determinanten zu

begründen suchte, während Lagrange in der classischen Abhandlung sur les pyramides 1773 von den Determinanten dritten Grades bei Problemen der analytischen Geometrie bereits in grosser Ausdehnung Gebrauch machte. Den wichtigsten Anstoss jedoch zur weiteren Ausbildung der Rechnung mit Determinanten haben Gauss' Disquisitiones arithmeticae 1801 gegeben. Ausgehend von der Betrachtung der Algorithmen, welche in diesem Werke sich auf die »Determinanten der quadratischen Formen« beziehen, stellten Binet und Cauchy 1812 die allgemeinen Regeln für die Multiplication der Determinanten auf, wodurch Rechnungen mit schwer zu bewältigenden Aggregaten eine unerwartete Leichtigkeit gewannen. Des neuen Calcüls, welchen besonders Cauchy weiter ausgebildet hatte, bemächtigte sich mit schöpferischer Kraft vorzüglich Jacobi 1826, dessen in Crelle's Journal niedergelegte Arbeiten reichlich Zeugniss geben, was das neue Instrument in des Meisters Hand zu leisten vermochte. Erst durch Jacobi's Abhandlungen »de formatione et proprietatibus determinantium« und »de determinantibus functionalibus 1841« wurden die Determinanten Gemeingut der Mathematiker, welches seitdem von verschiedenen Seiten her wesentliche Vermehrungen erhalten hat.

Jacobi's Abhandlung de formatione etc., welche nicht unmittelbar für das erste Studium des Gegenstandes verfasst ist, und Spottiswoode elementary theorems relating to determinants, London 1851, eine Schrift, welche bei zweckmässiger Anordnung des Stoffes und einer guten Auswahl von Beispielen manche Ungenauigkeiten und selbst Unrichtigkeiten enthält, wodurch ihrem Werthe Eintrag geschieht, waren die einzigen vorhandenen Anleitungen zur Kenntniss der Determinanten, als ich mich entschloss, das zum grossen Theil noch zerstreute Material in eine Theorie der Determinanten, begleitet von den wichtigsten Anwendungen derselben, zusammenzustellen. Meine Arbeit war fast zum Abschluss gebracht, als mir Brioschi la teorica dei determinanti, Pavia 1854, bekannt wurde. Dieses Werk, hervorgerufen durch das auf vielen Seiten gefühlte Bedürfniss einer elementaren Anleitung zur Kenntniss der Determinanten, ist, wenn auch in den Elementen nicht immer streng, doch mit vorzüglicher Sachkenntniss geschrieben und enthält einen reichen Schatz trefflichen Materials, wodurch es schnell in weiten

Kreisen Eingang und Anerkennung sich verschafft hat. Die jüngst in Berlin erschienene deutsche Uebersetzung dieses werthvollen Buches ist ohne Zweifel den deutschen Mathematikern sehr willkommen. Dass ich den Muth hatte, meine Schrift über denselben Gegenstand zu vollenden, gründet sich hauptsächlich auf die Verschiedenheit in der Anlage und Ausführung meiner Arbeit. Um den theoretischen Kern des Gegenstandes möglichst rein herauszuschälen, habe ich die Haupteigenschaften der Determinanten und die darauf gegründeten Algorithmen in synthetisch genau articulirtem Vortrag, wie er den Lehrbüchern von Alters her eignet, abgehandelt und wo es nöthig schien durch einfache Beispiele erläutert. Es kann zur klaren Einsicht in die Lehrsätze eines Systems nur erwünscht sein, bei jedem Lehrsatze die Summe der Prämissen, auf denen er beruht, straff zusammengezogen zu sehen. Dagegen habe ich die Anwendungen auf Algebra, Analysis und Geometrie in einen besondern Abschnitt vereinigt, um durch grösseren Zusammenhang leichtere Auffassung und in den einzelnen Materien eine gewisse Vollständigkeit erreichen zu können. Ueberall aber habe ich mit unablässigem Bemühen den Lehrsätzen und Beweisen möglichste Präcision zu verleihen gesucht, wo sie derselben noch zu entbehren schienen. Bei Annahme von Bezeichnungen und Benennungen in diesem Gebiete glaubte ich ängstliche Vorsicht anwenden zu müssen, weil die neuere Mathematik ohnediess von manchen Ausschweifungen zügelloser Terminologie mit Sprachverwirrung bedroht wird. Besonders aber wünschte ich meiner Arbeit dadurch einigen Werth zu verleihen, dass ich soviel als möglich bis zu den Originalquellen vorzudringen suchte, um die ersten Erfinder von Methoden und die ersten Entdecker von Lehrsätzen citiren zu können. Solche Citate sind nicht nur ein Opfer, welches die spätere Zeit den frühern Offenbarungen des Genius schuldet, sie bilden ein Stück Geschichte der Wissenschaft und laden zum Studium der hohen Werke ein, aus denen die Wissenschaft aufgebaut ist, und in denen noch immer reiche Schätze ungehoben ruhen. Freilich kann ich nicht erwarten, dass mein Suchen hierbei überall zum Finden des Richtigen geführt hat; ich hoffe aber, dass verlautete Irrthümer zu gelegentlicher Aussprache des Richtigen Veranlassung geben werden.

Nach dem Vorbemerkten ist es unnöthig hervorzuheben, was etwa von meiner Seite eigenes dem vorgefundenen Material hinzugefügt worden ist. Es bleibt mir nur übrig, die Güte meines gelehrten Freundes Borchardt dankbar zu rühmen, der durch mancherlei Anweisung mich bei meiner Arbeit wirksam unterstützt hat.

1857.

Zur zweiten Auflage.

Die günstige Aufnahme, welche der ersten Auflage dieses Buches zu Theil geworden ist, hat mich zu neuen Anstrengungen veranlasst, um durch Verbesserungen und Zusätze, die nöthig oder zweckmässig schienen, die fernere Brauchbarkeit meiner Arbeit zu sichern. Die Zusätze, welche insbesondere die partialen Determinanten und die linearen Substitutionen betreffen, und die neue Ausarbeitung der Paragraphen, welche das Differenzenproduct und die Resultante behandeln, waren durch die seit der ersten Auflage erschienenen mathematischen Arbeiten geboten. Auch die Darstellung der Determinanten von entgegengesetzt gleichen correspondirenden Elementen und die Auflösung der Systeme von linearen Gleichungen sind beträchtlich verändert worden. Ueberall aber war ich bedacht, den elementaren Character des Buches zu bewahren.

Wiederum habe ich den Freunden Borchardt und Kronecker vielfache Förderung meiner Bemühungen zu danken. Möge denn das Buch auch in dem neuen handlicheren Format, dem Format der französischen Uebersetzung von Houel 1861, der mathematischen Wissenschaft nützlich dienen und sich selbst Freunde erwerben.

Inhalt.

Theorie der Determinanten.

Anwendungen der Determinanten.



Erster Abschnitt.

Theorie der Determinanten.

---

§. 1. Eintheilung der Permutationen gegebener Elemente in zwei Classen.

1. Die Elemente einer Complexion, aus welcher Permutationen abgeleitet werden sollen, werden durch Ordnungszahlen unterschieden. Ein Element heisst höher als ein anderes, wenn es die grössere Ordnungszahl hat. Irgend zwei Elemente einer Complexion bilden eine Inversion (dérangement, variation)*), wenn das erste unter den beiden Elementen höher ist als das zweite, z. B. die Permutation $a_2 a_4 a_3 a_1$ enthält 4 Inversionen: $a_2 a_1$, $a_4 a_3$, $a_4 a_1$, $a_3 a_1$.

Die Permutationen gegebener Elemente sind von CRAMER in zwei Classen getheilt worden, deren erste die Permutationen umfasst, in welchen eine gerade Anzahl von Inversionen vorhanden ist, deren zweite die Permutationen mit ungerader Anzahl von Inversionen enthält.

2. **Lehrsatz.** Wenn in einer Permutation ein Element mit einem andern vertauscht wird, während die übrigen Elemente ihre Plätze behalten, so ändert sich die Anzahl der vorhandenen Inversionen um eine ungerade Zahl**).

---

*) CRAMER Analyse des lignes courbes, 1750. Appendix p. 658.

**) Die auf diesen Satz sich gründende Unterscheidung der Permutationen rührt von BEZOUT her (Hist. de l'acad. de Paris 1764 p. 292) und wurde zuerst begründet von LAPLACE in derselben Sammlung 1772, II p. 294, einfacher in der hier mitgetheilten Weise von MOLLWEIDE demonstratio eliminationis Cramerianae. Leipzig 1811. §. 9 und von GERGONNE Ann. de Math. 4 p. 150.

Beweis. Sind g und h die zu vertauschenden Elemente, h das höhere derselben, A die Gruppe der Elemente, welche g vorangehen, B die Gruppe der Elemente, welche zwischen g und h stehen, C die Gruppe der Elemente, welche h nachfolgen; ist also die gegebene Permutation

$$A\,g\,B\,h\,C,$$

und die zu bildende

$$A\,h\,B\,g\,C,$$

so rührt die gesuchte Aenderung der Anzahl der vorhandenen Inversionen von der Stellung her, welche g und h gegen einander und gegen die in B enthaltenen Elemente einnehmen.

Die Gruppe B enthalte β Elemente, von denen β_1 höher als g, β_2 höher als h seien. Dann sind in der Complexion gBh ausser den in B vorhandenen Inversionen deren $\beta-\beta_1+\beta_2$ anzutreffen, weil g höher ist als $\beta-\beta_1$ Elemente von B, und β_2 Elemente von B höher sind als h. Anstatt dieser Inversionen können in der Complexion hBg, welche durch Vertauschung von g und h abgeleitet ist, $\beta-\beta_2+1+\beta_1$ Inversionen vor, weil h höher ist als $\beta-\beta_2$ Elemente von B, ferner h höher als g, und endlich noch β_1 Elemente von B höher sind als g. Die Differenz dieser Anzahlen

$$\beta-\beta_2+1+\beta_1-(\beta-\beta_1+\beta_2)=2\beta_1-2\beta_2+1$$

ist ungerade, w. z. b. w.

3. Durch Vertauschung von jedesmal 2 Elementen können nach und nach alle Permutationen einer gegebenen Complexion dargestellt werden*). Die in dieser Reihe der Permutationen anzutreffenden Inversionen sind abwechselnd von gerader und ungerader Anzahl (2). Da die Anzahl aller Permutationen gerade ist, so giebt es ebensoviel Permutationen der ersten Classe, in denen eine gerade Anzahl Inversionen vorhanden ist, als Permutationen der zweiten Classe, welche eine ungerade Anzahl Inversionen enthalten. Jene lassen sich durch eine gerade, diese durch eine ungerade Anzahl Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen aus der gegebenen Complexion ableiten.

Zwei Permutationen gehören in dieselbe Classe, wenn eine aus der andern oder beide aus einer dritten durch eine gerade

*) Vergl. Gallenkamp Elem. d. Math. 1850 §. 110 oder des Verf. Elem. d. Math. 2tes Buch §. 27.

Anzahl Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen sich ableiten lassen.

4. **Analytischer Beweis des Lehrsatzes** (2)*). Zur Unterscheidung der Permutationen bilde man bei jeder derselben die Differenzen der den Elementen zugehörigen Ordnungszahlen, indem man die Ordnungszahl jedes Elements von der jedes folgenden Elements subtrahirt. Eine Permutation enthält soviel Inversionen, als unter den erwähnten Differenzen negative vorkommen (1).

Das Product dieser Differenzen ist eine alternirende Function der Ordnungszahlen**), welche durch Vertauschung von 2 Ordnungszahlen den entgegengesetzten Werth erhält.

Beweis. Nach der Vertauschung von zwei Ordnungszahlen haben die einzelnen Differenzen in veränderter Ordnung dieselben absoluten Werthe wie vorher, also behält ihr Product seinen absoluten Werth. Versteht man unter i und k zwei bestimmte, unter r und s zwei beliebige andere Ordnungszahlen: unter

$$\Pi(r-i)(r-k),\ \Pi(r-s)$$

die Producte der Factoren, deren allgemeine Formeln

$$(r-i)(r-k),\ r-s$$

sind; bezeichnet man endlich einen der Werthe 1 oder −1 durch ε, so kann das Product der bei einer gegebenen Permutation zu bildenden Differenzen durch

$$\varepsilon(k-i)\,\Pi(r-i)(r-k)\,\Pi(r-s)$$

dargestellt werden. Wird nun i mit k vertauscht, so bleiben

$$\Pi(r-i)(r-k) \text{ und } \Pi(r-s)$$

unverändert, und $k-i$ erhält den entgegengesetzten Werth. Also bekommt das Product den entgegengesetzten Werth, w. z. b. w.

Da durch Vertauschung von 2 Elementen der Permutation das in Betracht gezogène Product einen Zeichenwechsel erleidet, so ändert sich zugleich die Anzahl der negativen Differen-

*) Jacobi Determ. 2 (Crelle J. 22 no. 11).

**) Fonction alternée nach Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 30, Analyse algébr. III, 2. — Functio alternans nach Jacobi Crelle J. 22 p. 360.

zen, mithin die Anzahl der vorhandenen Inversionen um eine ungerade Zahl, wie oben bewiesen worden.

5. Die Vertauschung der Elemente einer Complexion heisst cyclisch, wenn jedes Element durch das folgende, das letzte Element durch das erste ersetzt wird.

Durch eine cyclische Vertauschung aller Elemente erhält man aus einer gegebenen Permutation eine Permutation derselben oder nicht derselben Classe, je nachdem die Anzahl der Elemente ungerade oder gerade ist. Denn die cyclische Vertauschung von n Elementen lässt sich durch Vertauschung des ersten Elements mit dem zweiten, dritten u. s. f., also durch $n-1$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen erreichen.

Aus einer gegebenen Permutation kann jede andere durch cyclische Vertauschung einzelner Gruppen von Elementen abgeleitet werden. Sind z. B.

7 2 5 4 3 8 1 6 9

die Ordnungszahlen der Elemente in der gegebenen Permutation, und

2 9 3 8 7 4 1 5 6

die Ordnungszahlen der Elemente in der abzuleitenden Permutation, so beginne man mit dem ersten umzustellenden Element der gegebenen Permutation, und ersetze der Reihe nach 7 durch 2, 2 durch 9, 9 durch 6, 6 durch 5, 5 durch 3, endlich 3 durch das Anfangs ausgestossene Element 7. Dadurch ist eine Gruppe von Elementen abgeschlossen und deren cyclische Vertauschung vollendet. Hierauf ersetze man aus der Reihe der noch übrigen Elemente 4 durch 8, 8 durch 4, womit die cyclische Vertauschung einer zweiten Gruppe von Elementen sich schliesst. Das noch übrige Element 1 ist durch ein anderes nicht zu ersetzen. Demnach ist durch 2 partiale cyclische Vertauschungen aus der ersten Permutation die zweite abgeleitet.

Wenn man jedes der Elemente, welches bei der eben beschriebenen Ableitung einer Permutation aus einer andern durch sich selbst zu ersetzen ist, als eine besondere Gruppe mitzählt, so gilt die Regel:

Zwei Permutationen gehören in dieselbe Classe oder nicht, je nachdem die Differenz der Anzahl

ihrer Elemente und der Anzahl der Gruppen, durch deren cyclische Vertauschung die eine Permutation aus der andern abgeleitet werden kann, gerade oder ungerade ist*). Bestehen nämlich die gegebenen Permutationen aus n Elementen, lässt sich aus der ersten die zweite dadurch ableiten, dass man die Elemente in p Gruppen von α_1, α_2, α_3, .. Elementen vertheilt, und die einzelnen Gruppen durch cyclische Vertauschung umbildet, so können die vorzunehmenden cyclischen Vertauschungen durch

$$(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)+(\alpha_3-1)+\,..$$

Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen bewirkt werden. Nun ist

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\,..\,=n,$$

also kann die zweite Permutation aus der ersten durch $n-p$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen abgeleitet werden.

Um die Elemente der ersten Gruppe an ihre neuen Plätze zu bringen, sind nicht weniger als α_1-1 Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen erforderlich u. s. f., daher kann eine der gegebenen Permutationen aus der andern nicht durch weniger als $n-p$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen abgeleitet werden. Im obigen Beispiel ist $p=3$, $n-p=6$, folglich gehören die gegebenen Permutationen derselben Classe an.

§. 2. Determinante eines Systems von n^2 Elementen.

1. Wenn m Zeilen (Horizontalreihen, lignes) von je n Elementen, oder von der andern Seite betrachtet n Colonnen (Verticalreihen) von je m Elementen zu unterscheiden sind, so werden die Elemente im Allgemeinen zweckmässig durch 2 Numern (indices, suffixe) bezeichnet, deren erstes die Stelle der Reihe, deren zweites die Stelle des Elements in der Reihe angiebt**), z. B.

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & .. & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & .. & a_{2,n} \\ . & . & . & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & .. & a_{m,n} \end{matrix}$$

---

*) Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 42. Anal. algébr. Note 4. Jacobi Det. 3.

**) Diese Bezeichnung ist zuerst von Leibniz angewandt worden. S. des-

Statt $a_{i,k}$ oder a_{ik} schreibt man auch $a_i^{(k)}$ oder bloss (i,k). Wenn $m=n$, so heisst die Reihe der Elemente vom ersten zum letzten

$$a_{1,1} \quad a_{2,2} \quad \cdot\cdot \quad a_{n,n}$$

die Diagonalreihe des Quadrats der Elemente.

2. Definition. Unter der Determinante des Systems von n^2 Elementen, welche in n Reihen von je n Elementen stehen und von denen das $k$te der $i$ten Reihe durch $a_{i,k}$ bezeichnet wird, versteht man das Aggregat der Producte von je n solchen Elementen, die sämmtlich aus verschiedenen Zeilen und Colonnen entnommen sind. Das Anfangsglied der Determinante ist das Product der Elemente der Diagonalreihe

$$a_{1,1} \quad a_{2,2} \quad \cdot\cdot \quad a_{n,n} \,.$$

Aus dem Anfangsglied werden die übrigen Glieder abgeleitet, indem man die ersten Numern unverändert lässt und die zweiten permutirt. Die einzelnen Glieder werden positiv oder negativ genommen, je nachdem die Permutationen der Numern, durch welche sie entstanden sind, derselben Classe angehören als die erste Complexion der Numern, oder nicht.

Die Determinante von n^2 Elementen heisst $n$ten Grades, weil ihre Glieder Producte von n Elementen sind. Sie hat $1.2\ldots n$ Glieder, welche zur Hälfte positiv, zur andern Hälfte negativ sind (§. 1, 3), unter denen aber entgegengesetzt gleiche nicht vorkommen, so lange nicht besondere Beziehungen zwischen den einzelnen Elementen stattfinden. Man bezeichnet die Determinante nach Cauchy und Jacobi durch Einschluss des Systems der Elemente zwischen Colonnenstriche, oder durch das mit dem Doppelzeichen $\pm$ unter ein Summenzeichen gesetzte Anfangsglied, oder nach Vandermonde durch Aufstellung der Reihe der ersten Numern, welche zur Unterscheidung der Elemente dienen, über der Reihe der zweiten Numern*):

sen Brief an L'Hôpital 1693 April 28 in Leibniz math. Schriften herausgeg. von Gerhardt II p. 239.

*) Cauchy J. de l'école polyt. Cah. 17 p. 52. Jacobi Det. 4 und Crelle J. 15 p. 115. Vandermonde Mem. sur l'elimination 1771 (Hist. de l'acad. de Paris 1772, II p. 517). Die Determinanten sind von Leibniz l. c. erfunden worden, der mit Hülfe derselben die Resultante von n linearen Gleichungen für $n-1$ Unbekannte, sowie die Resultante von 2 algebraischen Gleichungen für eine Unbekannte darzustellen suchte. Als zweiter Erfinder der Determinanten ist Cramer (vergl. §. 1, 1) zu nennen. Die von Cauchy

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot\,\cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot\,\cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot\,\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \,.\,.\, a_{n,n} = \frac{1 \mid 2 \mid \,.\,.\, \mid n}{1 \mid 2 \mid \,.\,.\, \mid n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & .\,. & n \\ 1 & 2 & .\,. & n \end{pmatrix}.$$

Beispiele.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - a_1 b\,.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = ab_1c_2 - ab_2c_1 + a_1b_2c - a_1bc_2 + a_2bc_1 - a_2b_1c\,.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} ab_1c_2d_3 - ab_1c_3d_2 + ab_2c_3d_1 - ab_2c_1d_3 + ab_3c_1d_2 - ab_3c_2d_1 \\ -a_1bc_2d_3 + a_1bc_3d_2 + a_1b_2cd_3 - a_1b_2c_3d - a_1b_3cd_2 + a_1b_3c_2d \\ +a_2bc_1d_3 - a_2bc_3d_1 - a_2b_1cd_3 + a_2b_1c_3d + a_2b_3cd_1 - a_2b_3c_1d \\ -a_3bc_1d_2 + a_3bc_2d_1 + a_3b_1cd_2 - a_3b_1c_2d - a_3b_2cd_1 + a_3b_2c_1d\,. \end{matrix}$$

3. Die Glieder der Determinante können aus dem Anfangsglied auch dadurch abgeleitet werden, dass man die ersten Numern permutirt, während die zweiten ihre Plätze behalten. Bei dem ersten Verfahren nimmt man der Reihe nach aus jeder Zeile Elemente, welche verschiedenen Colonnen angehören; bei dem zweiten Verfahren nimmt man der Reihe nach aus jeder Colonne Elemente, die verschiedenen Zeilen angehören. Irgend ein Glied $a_{1,p}\, a_{2,q}\, a_{3,r} \cdots$ welches beim ersten Verfahren durch Vertauschung von $a_{1,1}$ mit $a_{1,p}$, von $a_{2,2}$ mit $a_{2,q}$, von $a_{3,3}$ mit $a_{3,r}$, .. gebildet worden ist, ergiebt sich beim zweiten Verfahren durch Vertauschung von $a_{p,p}$ mit $a_{1,p}$, von $a_{q,q}$ mit $a_{2,q}$, von $a_{r,r}$ mit $a_{3,r}$; ... In beiden Fällen werden gleichviel Numern mit andern vertauscht, folglich erhält das abgeleitete Glied bei dem zweiten Verfahren dasselbe Zeichen, als beim ersten. Z. B. aus

$$a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}\ a_{4,4}\ a_{5,5}\ a_{6,6}$$

entspringt

$$a_{1,3}\ a_{2,2}\ a_{3,1}\ a_{4,4}\ a_{5,6}\ a_{6,5}$$

indem man die zweiten Numern 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit 3, 2, 1, 4, 6, 5 vertauscht. Dasselbe Glied kann man aus dem Anfangsglied

---

eingeführte Benennung Determinante ist von den nach dem obigen Gesetz gebildeten Aggregaten hergenommen, welche Gauss (Disquis. arithm.) Determinanten der quadratischen Formen genannt hat. Später hat Cauchy (Exerc. de Math., Exerc. d'Analyse) den Namen Determinante wieder mit fonction alternée und mit dem von Laplace (vergl. §. 1, 2) gebrauchten Ausdruck Resultante vertauscht.

auch dadurch finden, dass man die ersten Numern 3, 2, 1, 4, 6, 5 der Reihe nach in 1, 2, 3, 4, 5, 6 verwandelt. Bei dem einen wie bei den andern Verfahren werden 4 Numern durch andere ersetzt und in beiden Fällen erhält das abgeleitete Glied dasselbe Zeichen.

Zwei Systeme von der Art, dass die Zeilen des einen mit den Colonnen des andern übereinstimmen,

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot\cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdot\cdot & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdot\cdot & a_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{matrix}$$

haben einerlei Determinante $\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \cdot\cdot a_{n,n}$. Denn jedes Glied der einen Determinante kommt in der andern mit demselben Zeichen vor.

4. **Lehrsatz.** Die Determinante wechselt das Zeichen, wenn im System der Elemente eine Reihe mit einer parallelen Reihe vertauscht wird. Die Determinante verschwindet identisch, wenn die Elemente einer Reihe denen einer parallelen Reihe einzeln in derselben Ordnung gleich sind*).

Beweis. Ist R die gegebene Determinante, R' die durch Vertauschung von 2 parallelen Reihen der Elemente abgeleitete Determinante, so enthält R' dieselben Glieder als R mit entgegengesetzten Zeichen. Denn das Anfangsglied von R' entsteht aus dem Anfangsglied von R durch Vertauschung von 2 ersten oder 2 zweiten Numern, kommt also in R mit dem entgegengesetzten Zeichen vor. Alle andern Glieder von R', welche aus deren Anfangsglied durch eine ungerade (gerade) Anzahl Vertauschungen von jedesmal 2 Numern hervorgehen, entspringen aus dem Anfangsglied von R durch eine gerade (ungerade) Anzahl solcher Vertauschungen. Mithin kommen alle Glieder von R' in R mit den entgegengesetzten Zeichen vor, d. h. $R' = -R$.

Sind die in 2 parallelen Reihen stehenden Elemente einander der Reihe nach gleich, so wird durch Vertauschung dieser Reihen R in $-R$ verwandelt, das System der Elemente

*) Vandermonde l. c. p. 518 u. 522. Laplace Hist. de l'acad. de Paris 1772, II p. 297.

bleibt aber bei dieser Vertauschung unverändert, d. h. $-R=R$, folglich $R=0$ für beliebige Werthe der Elemente. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,1} & a_{1,3} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,2} & a_{2,1} & a_{2,3} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ a_{n,2} & a_{n,1} & a_{n,3} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{2,2} & \cdot & a_{2,n} & a_{2,1} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} & a_{n,1} \\ a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} & a_{1,1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} & a_{1,1} \\ a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} & a_{2,1} \\ \cdot & \cdot & & & \\ a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} & a_{n,1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{1,n} & a_{1,n-1} & \cdot & \cdot & a_{1,1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n,n} & a_{n,n-1} & \cdot & \cdot & a_{n,1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdot & \cdot & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0 \; .$$

Ueberhaupt: wenn sowohl $i, k, l, \ldots$ als auch $r, s, t, \ldots$ gegebene Permutationen von $1, 2, \ldots, n$ bedeuten, so ist

$$\begin{vmatrix} a_{i,r} & a_{i,s} & a_{i,t} & \cdot \\ a_{k,r} & a_{k,s} & a_{k,t} & \cdot \\ a_{l,r} & a_{l,s} & a_{l,t} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{r,k} & a_{r,l} & \cdot \\ a_{s,i} & a_{s,k} & a_{s,l} & \cdot \\ a_{t,i} & a_{t,k} & a_{t,l} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

worin ε die positive oder negative Einheit bedeutet, je nachdem die gegebenen Permutationen einer Classe angehören oder nicht.

5. Lehrsatz. Wenn die in einer Reihe stehenden Elemente des Systems mit Ausnahme eines einzigen verschwinden, so reducirt sich die Determinante des gegebenen Systems auf das Product des erwähnten Elements mit einer Determinante vom nächst niederen Grade*).

Beweis. Ist

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

und unter den Elementen

$$a_{i,1} \; a_{i,2} \; \cdot\cdot \; a_{i,n}$$

---

*) Jacobi Det. 5.

nur $a_{i,k}$ von 0 verschieden, so mache man im gegebenen System die $i$te Zeile der Elemente zur ersten Zeile und die $k$te Colonne zur ersten Colonne, so dass R durch $(i-1)+(k-1)$ Zeichenwechsel (4) in

$$\varepsilon R = \begin{vmatrix} a_{i,k} & a_{i,1} & \cdot\cdot & a_{i,k-1} & a_{i,k+1} & \cdot\cdot & a_{i,n} \\ a_{1,k} & a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ a_{i-1,k} & a_{i-1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i+1,k} & a_{i+1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ a_{n,k} & a_{n,1} & \cdot\cdot & & & & \end{vmatrix}$$

übergeht, wo $\varepsilon = (-1)^{i+k}$. Nach der Voraussetzung verschwinden die Glieder von εR, in welchen die erste unter den zweiten Numern von k verschieden ist. Daher reducirt sich εR auf die Glieder, welche aus dem Anfangsgliede

$$a_{i,k}\ a_{1,1} \cdot\cdot\ a_{n,n}$$

durch Permutation der zweiten Numern $1, 2, .., k-1, k+1, .., n$ nach Ausschliessung von k hervorgehen, d. i. auf die Glieder einer Determinante $(n-1)$ten Grades (2), welchen der Factor $a_{i,k}$ zugesetzt ist, also

$$\varepsilon R = a_{i,k} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i+1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{n,1} & \cdot\cdot & & & & \end{vmatrix}$$

worin ε die angegebene Bedeutung hat.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \end{vmatrix} = -d_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ c & c_1 & c_2 & c_3 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

6. Umgekehrt folgt, dass jede Determinante als Determinante von einem höhern Grade dargestellt werden kann, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ a_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{n+1,1} & \cdot\cdot & a_{n+1,n} \\ 0 & a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ 0 & a_{n,1} & & \cdot \\ 0 & a_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{n+2,n+1} & a_{n+2,1} & \cdot\cdot & a_{n+2,n} \\ 0 & 1 & a_{n+1,1} & \cdot\cdot & a_{n+1,n} \\ 0 & 0 & a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & a_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

u. s. w. Die Elemente

$$\begin{matrix} a_{n+1,1} & \cdot\cdot & a_{n+1,n} & \\ a_{n+2,1} & \cdot\cdot & a_{n+2,n} & a_{n+2,n+1}\,, \end{matrix}$$

welche in der Entwickelung der transformirten Determinante nicht angetroffen werden, können jeden beliebigen Werth annehmen, also auch verschwinden.

7. Wenn alle Elemente verschwinden, welche auf einer Seite der Diagonalreihe stehen, so reducirt sich die Determinante des gegebenen Systems auf ihr Anfangsglied.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdot\cdot & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdot\cdot & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdot\cdot & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,3} & \cdot\cdot & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} \text{ u. s. f. (5)}$$

$$= a_{1,1}\, a_{2,2} \cdot\cdot a_{n,n}\,.$$

§. 3. Entwickelung einer Determinante nach den in einer Reihe stehenden Elementen.

1. Bestimmung des Coefficienten $\alpha_{i,k}$, welchen das Element $a_{i,k}$ in der Determinante $R = \Sigma \pm a_{1,1} \cdot\cdot a_{n,n}$ hat. Um die Glieder von R, in denen $a_{i,k}$ vorkommt, übrig zu behalten, setze man die Elemente einer Reihe, welche das Element $a_{i,k}$ enthält, gleich 0 mit Ausnahme von $a_{i,k}$. Setzt man dann 1 an die Stelle von $a_{i,k}$, so findet man den gesuchten Coefficienten

$$\alpha_{i,k} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,k-1} & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdot\cdot & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \cdot\cdot & a_{i-1,n} \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdot\cdot & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} & \cdot\cdot & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & & \\ a_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,k-1} & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

welcher sich als Determinante $(n-1)$ten Grades darstellen lässt (§. 2, 5). Wenn man die $i$te Zeile zur ersten Zeile und die $k$te Colonne zur ersten Colonne macht, so finden $(i-1)+(k-1)$ Zeichenwechsel in $\alpha_{i,k}$ statt (§. 2, 1), folglich ist

$$\alpha_{i,k} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i+1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{n,1} & \cdot\cdot & & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} 1 & 2 & .. & i-1 & i+1 & .. & k & k+1 & .. & n \\ 1 & 2 & .. & i-1 & i & .. & k-1 & k+1 & .. & n \end{vmatrix}.$$

Wenn insbesondre jedes Element $a_{k,i}$ verschwindet, für welches $k>i$ ist, so verschwindet $\alpha_{i,k}$. Denn die Elemente der Diagonale verschwinden zum Theil, während alle einerseits der Diagonale stehenden Elemente verschwinden.

Durch ein analoges Verfahren leitet man aus R den Coefficienten ab, welchen das Product $a_{i,k}\, a_{r,s}$ in R hat, indem man 1 an die Stelle von $a_{i,k}$ und $a_{r,s}$ setzt und 0 an die Stelle der übrigen Elemente, welche die in $a_{i,k}$ und $a_{r,s}$ sich schneidenden Reihen des Systems enthalten. Dieser Coefficient reducirt sich auf eine Determinante $(n-2)$ten Grades u. s. f.

2. **Bestimmung von $\alpha_{i,k}$ durch cyclische Vertauschung.** Um aus R eine dem absoluten Werth nach gleiche Determinante, deren Anfangselement $a_{i,k}$ ist, durch cyclische Vertauschung abzuleiten, hat man nach einander $i-1$ cyclische Vertauschungen der Zeilen und $k-1$ cyclische Vertauschungen der Colonnen vorzunehmen, wodurch

$$(i-1+k-1)(n-1)$$

Zeichenwechsel eintreten (§. 1, 5). Daher ist (1)

$$\alpha_{i,k} = (-1)^{(n-1)(i+k)} \begin{vmatrix} a_{i+1,k+1} & \cdot\cdot & a_{i+1,n} & a_{i+1,1} & \cdot\cdot & a_{i+1,k-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{n,k+1} & \cdot\cdot & & & & \\ a_{1,k+1} & \cdot\cdot & & & & \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i-1,k+1} & \cdot\cdot & & & & \end{vmatrix}.$$

Bei Determinanten *ungeraden* Grades können die Coefficienten $\alpha_{i,k}$ aus $\alpha_{1,1}$ durch cyclische Vertauschung *ohne* Zeichen-

wechsel abgeleitet werden. Zu recurrenter Bildung der Determinanten hat man demnach

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b & c \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} .$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b & c & d \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 & d_3 \\ b & c & d \\ b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} b & c & d \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ c_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} .$$

3. **Lehrsatz.** Wenn $\alpha_{i,k}$ den Coefficienten des Elements $a_{i,k}$ in der Determinante R bedeutet, mithin $a_{i,k}\,\alpha_{i,k}$ das Aggregat der Glieder von R, welche das Element $a_{i,k}$ enthalten, so haben die Summen

$$a_{i,1}\,\alpha_{k,1} + a_{i,2}\,\alpha_{k,2} + \ldots + a_{i,n}\,\alpha_{k,n} ,$$
$$a_{1,i}\,\alpha_{1,k} + a_{2,i}\,\alpha_{2,k} + \ldots + a_{n,i}\,\alpha_{n,k}$$

den Werth R oder 0, je nachdem die Numern i und k gleich oder ungleich sind*).

Beweis. Jedes Glied von R enthält je eines der Elemente

$$a_{i,1} ,\ a_{i,2} ,\ \ldots ,\ a_{i,n} ,$$

welche die $i$te Zeile ausmachen. Nach Voraussetzung ist $a_{i,1}\,\alpha_{i,1}$ das Aggregat der Glieder von R, worin das Element $a_{i,1}$ vorkommt, u. s. w. Daher

$$R = a_{i,1}\,\alpha_{i,1} + a_{i,2}\,\alpha_{i,2} + \ldots + a_{i,n}\,\alpha_{i,n} .$$

Auf demselben Wege findet man die Identität

$$R = a_{1,i}\,\alpha_{1,i} + a_{2,i}\,\alpha_{2,i} + \ldots + a_{n,i}\,\alpha_{n,i} .$$

Setzt man hierin

$$a_{i,1} = a_{k,1} ,\ a_{i,2} = a_{k,2} ,\ \ldots \quad \text{oder} \quad a_{1,i} = a_{1,k} ,\ a_{2,i} = a_{2,k} ,\ \ldots$$

so erhält man Summen, welche den Determinanten von Systemen gleichgelten, worin die Elemente einer Reihe den Elementen einer parallelen Reihe einzeln gleich sind. Diese Determinanten verschwinden identisch (§. 2, 4).

4. Um eine Determinante mit einem Factor zu multipliciren, hat man alle Elemente einer Reihe mit demselben zu multipliciren. Den gemeinschaftlichen Factor aller Elemente einer Reihe kann man vor die Determinante setzen. Z. B.

---

*) Cramer l. c. Cauchy l. c. p. 66. Jacobi Det. 6. Die aus diesem Satze für $n = 3$ entspringenden Identitäten finden sich bei Lagrange sur les pyr. 7 (Mém. de l'acad. de Berlin 1773).

$$p\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa & b & c \\ pa_1 & b_1 & c_1 \\ pa_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa & pb & pc \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Dies ergiebt sich, wenn die Determinante unter der Form $a\alpha + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$ oder $a\alpha + b\beta + c\gamma$ vorgestellt wird. Ferner ist

$$-\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & b \\ -a_1 & b_1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b_1 & c_1 \\ a & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c_1 \\ a & b & c_2 \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & c_1 \\ 1 & 1 & c_2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Wenn die Elemente einer Colonne (Zeile) des Systems sich zu einander verhalten, wie die Elemente einer andern Colonne (Zeile), so verschwindet die Determinante identisch.

5. Sind alle Elemente einer Reihe Aggregate von m Gliedern, so lässt sich die Determinante in das Aggregat von m Determinanten auflösen. Wenn

$$a_{i,1} = p_1 + q_1 + r_1 + \ldots$$
$$a_{i,2} = p_2 + q_2 + r_2 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

so ist

$$\begin{aligned} R = {} & a_{i,1}\,\alpha_{i,1} + a_{i,2}\,\alpha_{i,2} + \ldots + a_{i,n}\,\alpha_{i,n} \\ = {} & p_1\,\alpha_{i,1} + p_2\,\alpha_{i,2} + \ldots + p_n\,\alpha_{i,n} \\ & + q_1\,\alpha_{i,1} + q_2\,\alpha_{i,2} + \ldots + q_n\,\alpha_{i,n} \\ & + r_1\,\alpha_{i,1} + r_2\,\alpha_{i,2} + \ldots + r_2\,\alpha_{i,n} \\ & + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die einzelnen Determinanten, in welche R sich zerlegen lässt, entspringen aus R, indem an die Stelle der Elemente

$$a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad \ldots \quad a_{i,n}$$

die Glieder derselben

$$\begin{matrix} p_1 & p_2 & \ldots & p_n \\ q_1 & q_2 & \ldots & q_n \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \end{matrix}$$

u. s. w. der Reihe nach gesetzt werden. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a+a' & a_1 & a_2 \\ b+b' & b_1 & b_2 \\ c+c' & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & a_1 & a_2 \\ b' & b_1 & b_2 \\ c' & c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

6. Der Werth einer Determinante wird nicht verändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe die mit einem beliebigen gemeinschaftlichen Factor multiplicirten Elemente einer parallelen Reihe addirt*)

$$\begin{vmatrix} a+bp & b & c \\ a_1+b_1p & b_1 & c_1 \\ a_2+b_2p & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} b & b & c \\ b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(vergl. 3. u. 2.), wovon die zweite Determinante identisch verschwindet (§. 2, 4).

Beispiele. $$\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b \\ x_1-a & y_1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a-a & b-b \\ 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$ vergl. §. 2, 6.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & & & \\ 0 & -2 & & \\ 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 16 .$$

Multiplicirt man in der Determinante

$$S = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & .. & b_n \\ b_{0,1} & b_{1,1} & .. & b_{n,1} \\ . & . & .. & . \\ b_{0,n} & b_{1,n} & .. & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

die $(n+1)$te Colonne mit b_{n-1} und subtrahirt dann von dieser Colonne die mit b_n multiplicirte vorhergehende Colonne; transformirt man auf dieselbe Weise die $n$te, $(n-1)$te, .. Colonne, so findet man

$$S\, b_0 b_1 \,..\, b_{n-1} = \begin{vmatrix} b_0 & b_0b_1 - b_1b_0 & .. & b_{n-1}b_n - b_n b_{n-1} \\ b_{0,1} & b_0b_{1,1} - b_1b_{0,1} & .. & b_{n-1}b_{n,1} - b_n b_{n-1,1} \\ . & . & .. & . \\ b_{0,n} & b_0b_{1,n} - b_1b_{0,n} & .. & b_{n-1}b_{n,n} - b_n b_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

und daher

$$S\, b_1 \,..\, b_{n-1} = \begin{vmatrix} b_0b_{1,1} - b_1b_{0,1} & .. & b_{n-1}b_{n,1} - b_n b_{n-1,1} \\ . & .. & . \\ b_0b_{1,n} - b_1b_{0,n} & .. & b_{n-1}b_{n,n} - b_n b_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

---

*) Jacobi Crelle J. 22 p. 371.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

ist durch $a+b+c+d$, $a-b-c+d$, $a-b+c-d$, $a+b-c-d$ theilbar, also auch durch das Product dieser Factoren. Der Quotient ist 1.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \begin{vmatrix} ax + by + cz & b & c \\ a'x + b'y + c'z & b' & c' \\ a''x + b''y + c''z & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

verschwindet, wenn x, y, z nicht verschwindende Werthe haben, für welche zugleich

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0 \\ a''x + b''y + c''z &= 0 . \end{aligned}$$

7. Wenn man

$$\binom{b}{k} = \frac{b\,(b-1)\,\ldots\,(b-k+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,k}$$

setzt, so ist

$$R = \begin{vmatrix} 1 & \binom{c+m}{1} & \binom{c+m+1}{2} & \ldots & \binom{c+2m-1}{m} \\ 1 & \binom{c+m+1}{1} & \binom{c+m+2}{2} & \ldots & \binom{c+2m}{m} \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & \binom{c+2m}{1} & \binom{c+2m+1}{2} & \ldots & \binom{c+3m-1}{m} \end{vmatrix} = 1$$

Denn zufolge der Identität

$$\binom{c+n}{k} - \binom{c+n-1}{k} = \binom{c+n-1}{k-1}$$

erhält man nach Verminderung jeder Zeile um die vorhergehende

$$R = \begin{vmatrix} 1 & \binom{c+m}{1} & \binom{c+m+1}{2} & \ldots & \binom{c+2m-1}{m} \\ 0 & 1 & \binom{c+m+1}{1} & \ldots & \binom{c+2m-1}{m-1} \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 1 & \binom{c+2m}{1} & \ldots & \binom{c+3m-2}{m-1} \end{vmatrix}$$

Vollzieht man dieselbe Operation an den letzten $m-1$, $m-2$,.. Zeilen, so werden alle Elemente der Diagonale 1, während alle Elemente einerseits der Diagonale verschwinden. Daher ist $R=1$, unabhängig von c und m.

8. Multiplicirt man in der Determinante (die leeren Stellen des Systems enthalten verschwindende Elemente)

$$B = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & & & & \\ a_1 & -b_0 & b_2 & & & \\ a_2 & & -b_1 & b_3 & & \\ . & . & . & & & \\ a_{n-1} & & & & -b_{n-2} & b_n \\ a_n & & & & & -b_{n-1} \end{vmatrix}$$

die Zeilen der Reihe nach mit $b_0, b_1, .., b_n$, und addirt dann zu jeder Zeile die folgenden Zeilen, so erhält man eine Determinante, die sich auf ihr Anfangsglied reducirt, nämlich

$$B\, b_0 b_1 \,..\, b_n = (-1)^n (a_0 b_0 + .. + a_n b_n)\, b_0 b_1 \,.\, b_1 b_2 \,.\, b_{n-1} b_n \,.$$

Daher ist

$$B = (-1)^n (a_0 b_0 + .. + a_n b_n)\, b_1 b_2 \,..\, b_{n-1} \;{}^{*)}.$$

9. Wenn die Elemente $a_{i,k}$ und $a_{k,i}$ gleich sind, und jedes in der Diagonale stehende Element $a_{i,i}$ der Summe der mit ihm in einer Reihe stehenden Elemente entgegengesetzt gleich ist, so verschwindet die Determinante $\Sigma \pm a_{1,1} \,..\, a_{n,n}$, und alle Elemente haben in der Determinante gleiche Coefficienten **).

Beweis. Alle Elemente einer Zeile von

$$\begin{vmatrix} a_{0,0} & . & . & a_{0,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,0} & . & . & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

verschwinden zufolge der Voraussetzung, wenn man zu derselben Zeile alle übrigen Zeilen des Systems addirt. Also verschwindet die Determinante.

Wenn man in dem Coefficienten von $a_{0,0}$

$$\alpha_{0,0} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & . & . & a_{1,n} \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & . & . & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

*) Hermite Liouv. J. 14 p. 26.

**) Borchardt Berl. Monatsbericht 1859 p. 380 und Crelle J. 57 p. 114.

zur $i$ten Zeile die übrigen Zeilen addirt, so kommen in die $i$te Zeile die Elemente

$$-a_{0,1} \quad -a_{0,2} \quad \cdot \; \cdot \quad -a_{0,n}\,.$$

Addirt man nun zur $k$ten Colonne die übrigen Colonnen, so erhält man in der $k$ten Colonne die Elemente

$$-a_{1,0} \quad \cdot \; \cdot \quad -a_{i-1,0} \quad a_{0,0} \quad -a_{i+1,0} \quad \cdot \; \cdot \quad -a_{n,0}\,.$$

Indem man noch die transformirten Reihen voranstellt, findet man

$$\alpha_{0,0} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{0,0} & \cdot\;\cdot & a_{0,k-1} & a_{0,k+1} & \cdot\;\cdot & a_{0,n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot & & & & \\ a_{i-1,0} & \cdot\;\cdot & & & & \\ a_{i+1,0} & \cdot\;\cdot & & & & \\ \cdot & \cdot\;\cdot & & & & \\ a_{n,0} & \cdot\;\cdot & & & & \end{vmatrix} = \alpha_{i,k}\,.$$

10. Die aus $2n-1$ Grössen gebildete Determinante $n$ten Grades

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdot\;\cdot & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdot\;\cdot & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & \cdot\;\cdot & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

bleibt unverändert, wenn an die Stelle der Grössen die Anfangsglieder ihrer Differenzen-Reihen gesetzt werden*).

Beweis. Man bilde aus der Reihe der gegebenen Grössen die Reihen ihrer ersten, zweiten, .. Differenzen, indem man jedes Glied von dem folgenden subtrahirt:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdot\;\cdot \\ & \varDelta_1 & \varDelta_{11} & \varDelta_{12} & \varDelta_{13} & \cdot\;\cdot \\ & & \varDelta_2 & \varDelta_{21} & \varDelta_{22} & \cdot\;\cdot \\ & & & \varDelta_3 & \varDelta_{31} & \cdot\;\cdot \\ & & & & \varDelta_4 & \cdot\;\cdot \\ & & & & & \cdot\;\cdot \end{array}$$

Subtrahirt man nun in P von der $n$ten, $(n-1)$ten, .. Colonne die jedesmal vorhergehende, so erhält man

---

*) H. Hankel über eine besondre Classe der symmetrischen Determinanten. Göttingen 1861. Das System $a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ heisst symmetrisch, wenn $a_{i,k} = a_{k,i}$. Das obige besondre System ist von Sylvester persymmetrisch, von Hankel orthosymmetrisch genannt worden.

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1 & \cdot\ \cdot & \Delta_{1,n-2} \\ a_1 & \Delta_{11} & \cdot\ \cdot & \Delta_{1,n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & \Delta_{1,n-1} & \cdot\ \cdot & \Delta_{1,2n-3} \end{vmatrix}$$

Indem man dieselbe Operation wiederholt an den neuen Colonnen vollzieht, findet man

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1 & \Delta_2 & \cdot\ \cdot & \Delta_{n-1} \\ a_1 & \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdot\ \cdot & \Delta_{n-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & \Delta_{1,n-1} & \Delta_{2,n-1} & \cdot\ \cdot & \Delta_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Führt man die angegebene Reihe von Operationen auch an den Zeilen der zuletzt gefundenen Determinante aus, so erhält man

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1 & \Delta_2 & \cdot\ \cdot & \Delta_{n-1} \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \cdot\ \cdot & \Delta_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \Delta_{n-1} & \Delta_n & \Delta_{n+1} & \cdot\ \cdot & \Delta_{2n-2} \end{vmatrix}$$

was zu beweisen war.

Ist insbesondre a_k eine ganze Function $m$ten Grades von k, so bilden wie bekannt die Grössen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung, und die Glieder ihrer $m$ten Differenzen-Reihe haben den gemeinschaftlichen Werth $\Delta_m = 1 \cdot 2 \ldots m$, weshalb $\Delta_{m+1}, \Delta_{m+2}, \ldots$ verschwinden. Wenn nun $n - 1 = m$, so wird (§. 2, 7)

$$P = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} (1 \cdot 2 \ldots m)^{m+1}$$

während P verschwindet, wenn $n - 1 < m$. In beiden Fällen können statt der Grössen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ auch die Grössen $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots$ gesetzt werden.

Wenn z. B. c eine beliebige Zahl ist und

$$a_k = \binom{c+k+m}{m} = \frac{(c+k+m)(c+k+m-1)\ldots(c+k+1)}{1 \cdot 2 \ldots m}$$

so hat man

$$P = \begin{vmatrix} \binom{c+m}{m} & \binom{c+m+1}{m} & \cdot\ \cdot & \binom{c+2m}{m} \\ \binom{c+m+1}{m} & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \binom{c+2m}{m} & \cdot & \cdot\ \cdot & \binom{c+3m}{m} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Weitere Anwendungen enthält die angeführte Abhandlung.

11. Wenn man aus $R = \Sigma \pm a_{11} \,.\,.\, a_{nn}$ und $S = \Sigma \pm b_{11} \,.\,.\, b_{nn}$ neue Determinanten ableitet, nämlich t_{ik} aus R dadurch, dass man die $i$te Colonne von R durch die $k$te von S ersetzt, und u_{ik} aus S dadurch, dass man die $i$te Colonne von S durch die $k$te Colonne von R ersetzt, so hat die Summe

$$t_{i1}\, u_{1k} + t_{i2}\, u_{2k} + \,.\,.\, + t_{in}\, u_{nk}$$

den Werth RS oder 0, je nachdem $i = k$ oder nicht *).

Beweis. Bezeichnet man die Coefficienten der Elemente $a_{i,k}$ und $b_{i,k}$ in R und S durch $\alpha_{i,k}$ und $\beta_{i,k}$, so hat man (3)

$$t_{i,1} = b_{1,1}\, \alpha_{1,i} + \,.\,.\, + b_{n,1}\, \alpha_{n,i}$$
$$.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$
$$t_{i,n} = b_{1,n}\, \alpha_{1,i} + \,.\,.\, + b_{n,n}\, \alpha_{n,i}$$

folglich

$$t_{i,1}\, \beta_{1,1} + \,.\,.\, + t_{i,n}\, \beta_{1,n} = \alpha_{1,i}\, S$$
$$.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$
$$t_{i,1}\, \beta_{n,1} + \,.\,.\, + t_{i,n}\, \beta_{n,n} = \alpha_{n,i}\, S$$

folglich

$$t_{i,1}\,(a_{1,k}\,\beta_{1,1} + \,.\,.\, + a_{n,k}\,\beta_{n,1}) + \,.\, + t_{i,n}\,(a_{1,k}\,\beta_{1,n} + \,.\,.\, + a_{n,k}\,\beta_{n,n})$$
$$= (a_{1,k}\,\alpha_{1,i} + \,.\,.\, + a_{n,k}\,\alpha_{n,i})\, S\,.$$

Nun ist $a_{1,k}\,\beta_{1,1} + \,.\,.\, + a_{n,k}\,\beta_{n,1} = u_{1,k}$, u. s. w.

Beispiele. Schreibt man zur Abkürzung

$$(ab) \qquad\qquad (abc) \qquad\qquad (abcd) \qquad\qquad \ldots$$

statt

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \qquad \ldots$$

so erhält man

$$(bc)(ad) + (ca)(bd) + (ab)(cd) = 0$$
$$(bcd)(aef) - (cda)(bef) + (dab)(cef) - (abc)(def) = 0$$
$$(bcde)(afgh) + (cdea)(bfgh) + (deab)(cfgh)$$
$$+ (eabc)(dfgh) + (abcd)(efgh) = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

*) Dieser Satz ist in einem allgemeinen Satz enthalten, der von Sylvester (s. unten §. 4, 10) herrührt. Den hier mitgetheilten Beweis hat Brioschi Det. (39) gegeben. Die einfachsten Fälle des Satzes kommen bei Bezout (équat. algebr. 1779 §. 220) vor. Die entsprechenden geometrischen Sätze (vergl. unten §. 15) hat Monge 1809 abgeleitet (Journ. de l'ec. polyt. Cah. 15 p. 68) und auf anderm Wege Möbius (baryc. Calc. §. 166 u. 171).

<u>12.</u> Bestimmung von α_{ik} durch Differentiation. Wenn die Elemente des Systems von einander unabhängig sind, so kommt bei der Differentiation von R (1) in Bezug auf a_{ik} nur das Aggregat $a_{ik}\,\alpha_{ik}$ in Betracht. Nun ist α_{ik} von a_{ik} unabhängig, folglich

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik}\ ^{*)}.$$

Der Coefficient von a_{ik} in R kann demnach durch den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}}$$

ausgedrückt werden.

Der Coefficient von $a_{ik}\,a_{rs}$ in R erscheint als Coefficient von a_{rs} in α_{ik} und kann demnach durch Differentiation von α_{ik} nach a_{rs} gefunden, mithin durch

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_{ik}\,\partial a_{rs}}\ ^{**)}$$

ausgedrückt werden. Aus diesem Coefficienten lässt sich der Coefficient von $a_{rk}\,a_{is}$ in R ableiten, wenn man i und r, d. h. die $i$te Zeile des gegebenen Systems mit der $r$ten vertauscht. Dabei erleidet R einen Zeichenwechsel, also ist der gesuchte Coefficient

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_{rk}\,\partial a_{is}} = -\frac{\partial^2 R}{\partial a_{ik}\,\partial a_{rs}}.$$

Analog lässt sich der Coefficient von $a_{ik}\,a_{rs}\,a_{uv}$ in R bestimmen. Man findet dabei Relationen zwischen den dritten partialen Differentialquotienten von R u. s. w.

13. Sind die Elemente des Systems, welche dieselben Numern in umgekehrter Ordnung haben, z. B. a_{ik} und a_{ki}, von einander abhängig, so sind auch die Determinanten $m$ten Grades

$$P = \begin{vmatrix} a_{i,r} & a_{i,s} & a_{i,t} & \cdot \\ a_{k,r} & a_{k,s} & a_{k,t} & \cdot \\ a_{l,r} & a_{l,s} & a_{l,t} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad Q = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{r,k} & a_{r,l} & \cdot \\ a_{s,i} & a_{s,k} & a_{s,l} & \cdot \\ a_{t,i} & a_{t,k} & a_{t,l} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix},$$

deren eine aus der andern dadurch entsteht, dass die Reihe der ersten Numern mit der Reihe der zweiten Numern vertauscht wird, von einander abhängig.

---

*) Jacobi Det. 6.

**) Jacobi Det. 10.

I. Wenn insbesondere $a_{ki} = \varepsilon a_{ik}$, wobei ε entweder 1 oder -1 bedeutet, und in dem zweiten Falle die Elemente $a_{11}, a_{22}, \ldots$ als verschwindend vorausgesetzt werden, so erhält man durch Multiplication jeder Colonne mit ε

$$\varepsilon^m P = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{s,i} & a_{t,i} & \cdot \\ a_{r,k} & a_{s,k} & a_{t,k} & \cdot \\ a_{r,l} & a_{s,l} & a_{t,l} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{r,k} & a_{r,l} & \cdot \\ a_{s,i} & a_{s,k} & a_{s,l} & \cdot \\ a_{t,i} & a_{t,k} & a_{t,l} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = Q\,.$$

Ist die Reihe $r,s,t,\ldots$ eine Permutation der Reihe $i,k,l,\ldots$ und $\varepsilon = -1$, m ungerade, so ist Q nicht nur $= P$ (§. 2, 4), sondern auch $= -P$, d. h. die Determinante verschwindet identisch.

II. Wenn die Elemente der Diagonale $a_{11}, a_{22}, \ldots$ real, die andern aber complex und paarweise a_{ik} und a_{ki} conjugirt sind, so hat die Determinante $R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ einen realen Werth [*], während die Elemente a_{ik} und a_{ki} in R conjugirte complexe Coefficienten α_{ik} und α_{ki} besitzen.

Vertauscht man nämlich in den complexen Elementen $\sqrt{-1}$ mit $-\sqrt{-1}$, so geht a_{ik} in a_{ki} über, und die Zeilen des gegebenen Systems werden die Colonnen des neuen Systems. Demnach bleibt die Determinante R unverändert (§. 2, 3), also kann sie nicht complex sein. Dagegen geht α_{ik} in α_{ki} über, so dass beide conjugirt complexe Werthe haben.

14. Wenn R wie oben die Determinante $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ und α_{ik} den Coefficienten von a_{ik} in R bedeutet, so ist unter der Voraussetzung $a_{ki} = a_{ik}$

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} \text{ [**]}, \qquad \alpha_{ii} = \frac{\partial R}{\partial a_{ii}}\,.$$

Dagegen ist unter der Voraussetzung $a_{ki} = -a_{ik}$ und $a_{ii} = 0$

$$R = (-1)^n R\,, \qquad \alpha_{ik} = (-1)^{n-1} \alpha_{ki}$$

d. h. bei geradem n

$$\alpha_{ik} = -\alpha_{ki} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial a_{ik}}\,, \qquad \alpha_{ii} = 0$$

und bei ungeradem n

$$R = 0 \text{ [***]}, \qquad \alpha_{ik} = \alpha_{ki}\,.$$

[*] Hermite Comptes rendus 41 p. 181. Crelle J. 52 p. 40.

[**] Jacobi Crelle J. 12 p. 20.

[***] Jacobi Crelle J. 2 p. 354.

Beweis. Die über R und α_{ik} aufgestellten Behauptungen folgen aus den im vorigen Artikel gefundenen Eigenschaften von P und Q (vergl. 1). Ferner ist wegen des Zusammenhangs zwischen den correspondirenden Elementen a_{ik} und a_{ki} (12)

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik} + \alpha_{ki}\frac{\partial a_{ki}}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik} + \varepsilon\alpha_{ki}\,.$$

Nach der ersten Voraussetzung ist aber $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$, folglich

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = 2\alpha_{ik}\,.$$

Gemäss der zweiten Voraussetzung und bei geradem n ist $-\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$, mithin

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik} - \alpha_{ki}$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = 2\alpha_{ik}\,.$$

Bei ungeradem n verschwindet $\frac{\partial R}{\partial a_{ik}}$ identisch, wie R selbst, und die Gleichung

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik} - \alpha_{ki}$$

giebt das bereits erhaltene Resultat $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$.

15. Differential einer Determinante. Wenn alle Elemente des Systems als von einander unabhängige Variable betrachtet werden, so ist vermöge der Gleichung (12)

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik}$$

das vollständige Differential

$$dR = \sum_{i,k} \alpha_{ik}\, da_{ik}\,^{*)}$$

eine Summe, deren Glieder man aus $\alpha_{ik}\, da_{ik}$ ableitet, indem man für i und k alle Numern von 1 bis n setzt.

Beispiele.

$$R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{44} = \begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ b & 2c & d & 0 \\ 0 & b & 2c & d \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial a_{22}}\frac{\partial a_{22}}{\partial a} = \alpha_{11} + \alpha_{22}$$

$$\frac{\partial R}{\partial b} = \frac{\partial R}{\partial a_{12}}\frac{\partial a_{12}}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial a_{23}}\frac{\partial a_{23}}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial a_{31}}\frac{\partial a_{31}}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial a_{42}}\frac{\partial a_{42}}{\partial b}$$

$$= 2\alpha_{12} + 2\alpha_{23} + \alpha_{31} + \alpha_{42}$$

*) Jacobi Det. 6.

$$\frac{\partial R}{\partial c} = a_{13} + a_{24} + 2a_{32} + 2a_{43}$$

$$\frac{\partial R}{\partial d} = a_{33} + a_{44}\,.$$

Sind $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Functionen von x, bezeichnet man den $k$ten Differentialquotienten von y_i durch y_{ik}, bildet die Determinante $n$ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdot\cdot & y_n \\ y_{1,1} & y_{2,1} & \cdot\cdot & y_{n,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ y_{1,n-1} & y_{2,n-1} & \cdot\cdot & y_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

und bezeichnet mit η_{ik} den Coefficienten von y_{ik} in R_n, so hat man nach der aufgestellten Formel

$$\frac{dR}{dx} = \sum_{i,k} \eta_{ik} \frac{dy_{ik}}{dx} = \sum_{i,k} \eta_{ik}\; y_{i,k+1}\,.$$

Die Summe (3)

$$\eta_{1,k}\; y_{1,k+1} + \eta_{2,k}\; y_{2,k+1} + \cdot\cdot + \eta_{n,k}\; y_{n,k+1}$$

verschwindet für jedes k unter $n-1$, folglich bleibt

$$\frac{dR}{dx} = \sum_i \eta_{i,n-1}\; y_{i,n}\;^{*}.$$

Sind $t_1, t_2, \ldots, t_n$ von einander unabhängig, und

$$R_n = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdot\cdot & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdot\cdot & t_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdot\cdot & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

so findet man

$$\frac{\partial R_n}{\partial t_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2t_1 & \cdot\cdot & (n-1)\,t_1^{n-2} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdot\cdot & t_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdot\cdot & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial^{n-1} R_n}{\partial t_1 \ldots \partial t_{n-1}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2t_1 & \cdot\cdot & (n-1)\,t_1^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 2t_{n-1} & \cdot\cdot & (n-1)\,t_{n-1}^{n-2} \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdot\cdot & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}\,.\,1\,.\,2\,\ldots(n-1)\; R_{n-1}\,.$$

---

*) Abel Crelle J. 2 p. 22. Malmsten Crelle J. 39 p. 91.

Ebenso ergiebt sich

$$f t_1^2 \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{R_n}{f t_1}\right) = \begin{vmatrix} -f' t_1 & f t_1 - t_1 f' t_1 & .. & (n-1) t_1^{n-2} f t_1 - t_1^{n-1} f' t_1 \\ 1 & t_2 & .. & t_2^{n-1} \\ . & . & .. & . \\ 1 & t_n & .. & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$f t_1^2 f t_2^2 \, .. \, f t_n^2 \frac{\partial^n}{\partial t_1 \, .. \, \partial t_n}\left(\frac{R_n}{f t_1 \, .. \, f t_n}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} -f' t_1 & f t_1 - t_1 f' t_1 & .. & (n-1) t_1^{n-2} f t_1 - t_1^{n-1} f' t_1 \\ . & . & .. & . \\ -f' t_n & f t_n - t_n f' t_n & .. & (n-1) t_n^{n-2} f t_n - t_n^{n-1} f' t_n \end{vmatrix}.$$

16. Bezeichnet man die Determinante $\Sigma \pm a_{1,1} \, .. \, a_{n,n}$ durch R, und den Coefficienten des Elements $a_{i,k}$ in R durch $\alpha_{i,k}$, so giebt die Entwickelung der Determinante $(n+1)$ ten Grades

$$S = \Sigma \pm a_{0,0} \, a_{1,1} \, .. \, a_{n,n}$$

nach den Elementen, welche mit $a_{0,0}$ in derselben Zeile und Colonne stehn:

$$S = a_{0,0} R - \sum_{i,k} a_{i,0} \, a_{0,k} \, \alpha_{i,k} \; ^{*)}.$$

Die Glieder der Summe werden dargestellt, indem man für i und k alle Numern bis n ausser 0 setzt.

Beweis. Die Glieder der Determinante S enthalten entweder das Element $a_{0,0}$ oder das Product eines der Elemente $a_{1,0}, a_{2,0}, ..$ mit einem der Elemente $a_{0,1}, a_{0,2}, ..$ z. B. $a_{i,0} \, a_{0,k}$. Das Aggregat der Glieder von S, in denen $a_{0,0}$ vorkommt, ist $a_{0,0} R$ (1). Der Coefficient des Products $a_{i,0} \, a_{0,k}$ in S ist dem Coefficienten von $a_{0,0} \, a_{i,k}$ in S entgegengesetzt gleich (12), mithin dem Coefficienten von $a_{i,k}$ in R entgegengesetzt gleich. Daher ist $-\alpha_{i,k}$ der Coefficient von $a_{i,0} \, a_{0,k}$ in S.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b' & 1 & 0 & 0 \\ c' & 0 & 1 & 0 \\ d' & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a - bb' - cc' - dd'.$$

17. Ist das System der Elemente symmetrisch, so dass $a_{k,i} = a_{i,k}$ und folglich $\alpha_{k,i} = \alpha_{i,k}$ (13), so sind die Glieder der

*) Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 69.

Summe (16), welche aus zwei verschiedenen Werthen von i und k entspringen, einander gleich.

Beispiele.

$$\begin{vmatrix} a & b_{01} & b_{02} \\ b_{01} & a_1 & b_{12} \\ b_{02} & b_{12} & a_2 \end{vmatrix} = aa_1a_2 - ab_{12}^2 - a_1b_{02}^2 - a_2b_{01}^2 + 2b_{01}b_{02}b_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{01} & a_1 & b_{12} & b_{13} \\ b_{02} & b_{12} & a_2 & b_{23} \\ b_{03} & b_{13} & b_{23} & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= a(a_1a_2a_3 - a_1b_{23}^2 - a_2b_{13}^2 - a_3b_{12}^2 + 2b_{12}b_{13}b_{23})$$
$$- b_{01}^2(a_2a_3 - b_{23}^2) - b_{02}^2(a_1a_3 - b_{13}^2) - b_{03}^2(a_1a_2 - b_{12}^2)$$
$$+ 2b_{01}b_{02}(a_3b_{12} - b_{13}b_{23}) + 2b_{01}b_{03}(a_2b_{13} - b_{12}b_{23}) + 2b_{02}b_{03}(a_1b_{23} - b_{12}b_{13}).$$

Insbesondere ist

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c_1 & b_1 \\ b & c_1 & 0 & a_1 \\ c & b_1 & a_1 & 0 \end{vmatrix} = a^2a_1^2 + b^2b_1^2 + c^2c_1^2 - 2aa_1bb_1 - 2aa_1cc_1 - 2bb_1cc_1$$
$$= (aa_1 + bb_1 - cc_1)^2 - 4aa_1bb_1$$

$$= -(\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1})(-\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1})$$
$$\times (\sqrt{aa_1} - \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1})(\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} - \sqrt{cc_1})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$$
$$= (a + b - c)^2 - 4ab$$

$$= -(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}).$$

§. 4. Zerlegung einer Determinante nach partialen Determinanten.

1. Wenn man aus dem gegebenen System von n^2 Elementen

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{matrix}$$

beliebig m Zeilen auswählt, deren Numern durch $f, g, h, ..$ bezeichnet werden, und von diesen Zeilen m Colonnen behält, deren Numern $r, s, t, ..$ sind, so heisst die Determinante $m$ten Grades

$$P = \begin{vmatrix} a_{fr} & a_{fs} & a_{ft} & . \\ a_{gr} & a_{gs} & a_{gt} & . \\ a_{hr} & a_{hs} & a_{ht} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

eine partiale Determinante*) des gegebenen Systems.

Die partiale Determinante P multiplicirt mit einem bestimmten Coefficienten Q ist das Aggregat der Glieder von

$$R = \Sigma \pm a_{11} \,.\,.\, a_{nn}$$

welche dadurch entstehn, dass man sowohl die m Numern $f, g, h, ..,$ als auch die übrigen $n-m$ Numern der Reihe $1, 2, ..., n$ unter einander auf alle Arten vertauscht, oder dadurch, dass man nur die Numern $r, s, t, ..$ und die übrigen vertauscht. Daher ist der Coefficient Q, welchen P in R hat, eine partiale Determinante $(n-m)$ten Grades, welche sich wie folgt angeben lässt. Sind

$$f, g, h, \,..\,, \varphi, \chi, \psi, \,..$$
$$r, s, t, \,..\,, \varrho, \sigma, \tau, \,..$$

Permutationen von $1, 2, .., n$, so ist

$$\Sigma \pm a_{fr}\, a_{gs}\, a_{ht} \,..\, a_{\varphi\varrho}\, a_{\chi\sigma}\, a_{\psi\tau} \,..\, = \varepsilon R\,,$$

wobei ε den Werth 1 oder -1 hat, je nachdem die Permutationen in eine Classe gehören oder nicht (§. 2, 4). Nun hat P in εR denselben Coefficienten, als das Product $a_{fr}\, a_{gs}\, a_{ht} ..$, folglich ist

$$\varepsilon Q = \Sigma \pm a_{\varphi\varrho}\, a_{\chi\sigma}\, a_{\psi\tau} \,...$$

Die Determinante R geht in Q über, wenn die Elemente $a_{fr}, a_{gs}, a_{ht}, ..$ den Werth 1 erhalten, während die übrigen Elemente, welche mit den genannten je in einer Zeile oder in einer Colonne stehn, verschwinden**).

---

*) Jacobi Crelle J. 27 p. 206. 30 p. 136. Von gleicher Bedeutung ist Dét. d'un système dérivé bei Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 96, Minor determinant bei den englischen, Unterdeterminante Subdeterminante bei den deutschen Mathematikern.

**) Daher heissen die partialen Determinanten P und Q complementär bei Cauchy l. c.

Unter der Voraussetzung von einander unabhängiger Elemente hat man (§. 3, 12)

$$Q = \frac{\partial^m R}{\partial a_{fr}\, \partial a_{gs}\, \partial a_{ht} \ldots}.$$

2. Bildet man die Coefficienten, welche a_{ff}, $a_{ff}\,a_{gg}$, $a_{ff}\,a_{gg}\,a_{hh}\ldots$ in der Determinante R haben, und bezeichnet man die Werthe, welche R und diese partialen Determinanten annehmen, wenn alle Elemente der Diagonale $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ durch Nullen ersetzt werden, durch D, D_f, D_{fg}, $D_{fgh}, \ldots$, so hat man

$$R = D + \Sigma\, a_{ff}\, D_f + \Sigma\, a_{ff}\, a_{gg}\, D_{fg} + \ldots + a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}.$$

Die Glieder der einzelnen Summen werden erhalten, wenn man für f alle Numern $1, 2, \ldots, n$, für fg alle Binionen derselben, für fgh alle Ternionen derselben u. s. w. setzt*).

Beweis. Die Glieder von R, welche keines der Elemente $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ enthalten, stimmen mit den Gliedern von D überein. Aus dem Aggregat der Glieder von R, welche das Product von m bestimmten Elementen der Diagonale $a_{ff}\,a_{gg}\,a_{hh}\ldots$ enthalten, entspringt das Aggregat der Glieder von R, welche ausser jenen Elementen kein andres Element der Diagonale enthalten, indem man die übrigen Elemente der Diagonale durch Nullen ersetzt. Also ist dieses Aggregat von

$$a_{ff}\, a_{gg}\, a_{hh} \ldots D_{fgh\ldots}$$

nicht verschieden. Die Summe dieser auf alle möglichen Arten gebildeten Aggregate umfasst alle Glieder der Determinante R.

3. Die Entwickelung der Determinante

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{11}+z & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+z & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}+z \end{vmatrix}$$

nach Potenzen von z giebt

$$R_n + z\,\Sigma R_{n-1} + z^2\,\Sigma R_{n-2} + \ldots + z^{n-1}\,\Sigma R_1 + z^n,$$

wo

$$R_m = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} & \cdot \\ a_{ki} & a_{kk} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

*) Cayley Crelle J. 38 p. 93.

eine partiale Determinante $m$ten Grades ist, deren Diagonale aus Elementen der Diagonale von R_n besteht, und ΣR_m die Summe der Determinanten bedeutet, welche aus R_m entspringen, indem für $i, k, ..$ alle verschiedenen Combinationen von je m aus der Reihe $1, 2, .., n$ gesetzt werden *).

Beweis. Die Uebereinstimmung des ersten Gliedes R_n mit $f(0)$ und die Richtigkeit des letzten Gliedes z^n ist unmittelbar wahrzunehmen. Die Glieder der Entwickelung, welche z^m enthalten, entspringen aus den Gliedern der Determinante $f(z)$, worin irgend welche m Elemente der Diagonale vorkommen. Bedeutet nun $i, k, ..$ irgend eine (aufsteigend geordnete) Combination von m Numern der Reihe $1, 2, ..n$ und $r, s, ..$ die Reihe der übrigen Numern, so ist (§. 2, 4)

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{ii}+z & a_{ik} & .. & a_{ir} & a_{is} & . \\ a_{ki} & a_{kk}+z & .. & a_{kr} & a_{ks} & . \\ . & . & . & & & \\ a_{ri} & a_{rk} & .. & a_{rr}+z & a_{rs} & . \\ a_{si} & a_{sk} & .. & a_{sr} & a_{ss}+z & . \\ . & . & . & & & \end{vmatrix}$$

Aus dieser Form von $f(z)$ erkennt man (1), dass die Entwickelung des Products

$$\begin{vmatrix} a_{ii}+z & a_{ik} & . \\ a_{ki} & a_{kk}+z & . \\ . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{rr}+z & a_{rs} & . \\ a_{sr} & a_{ss}+z & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

einen Theil der gesuchten Entwickelung von der Determinante $f(z)$ bildet. Die Entwickelung des ersten Factors nach Potenzen von z schliesst mit z^m, die des zweiten Factors beginnt mit

$$\begin{vmatrix} a_{rr} & a_{rs} & . \\ a_{sr} & a_{ss} & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

Daher ist

$$z^m \begin{vmatrix} a_{rr} & a_{rs} & . \\ a_{sr} & a_{ss} & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

die allgemeine Formel für ein Glied von $f(z)$, in welchem z^m vorkommt. Indem man für $i, k, ..$ alle möglichen Combinationen von je m Numern aus der Reihe $1, 2, .., n$, folglich für $r, s, ..$

*) Jacobi Crelle J. 12 p. 15.

alle möglichen Combinationen von je $n-m$ aus derselben Reihe setzt, erhält man alle Glieder von $f(z)$, in denen der Factor z^m anzutreffen ist.

4. Die Determinante $n$ten Grades $R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ kann in eine Summe von

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \ldots m} = \mu$$

Producten je einer partialen Determinante $m$ten Grades und einer zugehörigen partialen Determinante $(n-m)$ten Grades zerlegt werden.

Aus den Numern $1, 2, \ldots, n$, durch deren Permutationen die Glieder der Determinante R entstehn, wähle man m verschiedene z. B. $f, g, h \ldots$ und bilde die partiale Determinante $m$ten Grades

$$P = \Sigma \pm a_{f,1}\, a_{g,2}\, a_{h,3} \cdots$$

Werden die übrigen Numern durch $r, s, t, \ldots$ bezeichnet, so hat P in

$$\varepsilon R = \Sigma \pm a_{f,1}\, a_{g,2}\, a_{h,3} \cdots a_{r,m+1}\, a_{s,m+2}\, a_{t,m+3} \cdots$$

zum Coefficienten die partiale Determinante $(n-m)$ten Grades

$$Q = \Sigma \pm a_{r,m+1}\, a_{s,m+2}\, a_{t,m+3} \cdots,$$

wenn ε den Werth 1 oder -1 hat, je nachdem die Reihen $f, g, h, \ldots r, s, t, \ldots$ und $1, 2, \ldots, n$ in dieselbe Classe der Permutationen gehören oder nicht. Dann ist

$$R = \Sigma\, \varepsilon P Q$$

eine Summe von μ Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für $f, g, h, \ldots$ alle Combinationen von m verschiedenen Numern der Reihe $1, 2, \ldots, n$, für $r, s, t, \ldots$ die jedesmal übrigen Numern setzt, und ε auf die angegebene Art bestimmt*).

Beweis. Ein Product wie PQ enthält diejenigen Glieder von R, welche aus dem Anfangsglied $a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ dadurch entstehn, dass man von den beweglichen Numern m in eine Gruppe, die übrigen in eine zweite Gruppe vereinigt, und die Numern der einzelnen Gruppen permutirt. Wenn man die einzelnen Gruppen auf alle möglichen Arten bildet und dabei die Numern der Gruppen permutirt, so erhält man alle Permutationen der m beweglichen Numern. Also umfasst die angegebene Summe von Producten alle Glieder von R.

*) Vandermonde l. c. p. 524 und Laplace l. c. p. 294. Jacobi Det. 8.

Das Product PQ hat $1.2..m.1.2..(n-m)$ Glieder: in der That hat die Summe aller Producte μmal so viel d. i. $1.2..n$ Glieder.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}.$$

Die Zerlegung einer Determinante $n$ten Grades in eine Summe von Producten aus partialen Determinanten 2ten und $n-2$ ten Grades findet man ausführlich behandelt bei JACOBI Det. 9 u. 10.

5. Die Determinante R kann auch in eine Summe von Producten aus mehr als je zwei partialen Determinanten zerlegt werden.

Man wähle aus den beweglichen Numern $1, 2, .., n$ zuerst α z. B. $f, g, h, ..$; dann aus den übrigen Numern β z. B. $p, q, r, ..$; dann aus den übrigen γ z. B. $t, u, v, ..$, u. s. f. so dass $\alpha+\beta+\gamma+..=n$; und bilde nun die partialen Determinanten αten, βten, γten, .. Grades

$$A = \Sigma \pm a_{f,1}\, a_{g,2}\, a_{h,3} \,..$$

$$B = \Sigma \pm a_{p,\alpha+1}\, a_{q,\alpha+2}\, a_{r,\alpha+3} \,..$$

$$C = \Sigma \pm a_{t,\alpha+\beta+1}\, a_{u,\alpha+\beta+2}\, a_{v,\alpha+\beta+3} \,..$$

u. s. w. Dann ist $R = \Sigma\, \varepsilon ABC..$ die Summe von

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}.. = \frac{1.2..n}{1.2..\alpha.1.2..\beta.1.2..\gamma...}$$

Gliedern, welche entstehn, indem man $A, B, C, ..$ auf alle möglichen Arten bildet. Dabei bedeutet ε die positive oder negative Einheit, je nachdem die Reihe

$$f, g, h, .., \; p, q, r, .., \; t, u, v, ...$$

eine Permutation der ersten oder der zweiten Classe von $1, 2, .., n$ ist*).

*) Dieser allgemeine Satz heisst der LAPLACE'sche Determinantensatz. Vergl. die vorigen Citate.

6. Wenn die Elemente des Systems verschwinden, welche m Colonnen mit $n-m$ Zeilen gemein haben, so reducirt sich die Determinante auf das Product einer Determinante $m$ten Grades mit einer Determinante $(n-m)$ ten Grades*).

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,m} & a_{1,m+1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{m,1} & \cdot\cdot & a_{m,m} & a_{m,m+1} & \cdot\cdot & a_{m,n} \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & a_{m+1,m+1} & \cdot\cdot & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & a_{n,m+1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{m,1} & \cdot\cdot & a_{m,m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdot\cdot & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n,m+1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Wenn die Elemente verschwinden, welche m Colonnen mit mehr als $n-m$ Zeilen gemein haben, so verschwindet die Determinante identisch.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,m} & a_{1,m+1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{m-1,1} & \cdot\cdot & a_{m-1,m} & a_{m-1,m+1} & \cdot\cdot & a_{m-1,n} \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & a_{m,m+1} & \cdot\cdot & a_{m,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ 0 & \cdot\cdot & 0 & a_{n,m+1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0 .$$

Beweis. Zerlegt man die gegebene Determinante in eine Summe von Producten aus partialen Determinanten $m$ten und $(n-m)$ ten Grades dergestalt, dass die Elemente der Determinanten $m$ten Grades aus den oben erwähnten m Colonnen, die Elemente der Determinanten $(n-m)$ ten Grades aus den übrigen Colonnen des Systems gewählt werden (4), so ist unter den zu bildenden Determinanten $m$ten Grades in dem ersten Falle nur eine, in dem zweiten Falle keine von Null verschieden.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+a_4 & a_2+a_3 & a_3+a_2 & a_4+a_1 \\ b_1+b_4 & b_2+b_3 & b_3+b_2 & b_4+b_1 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1+a_4 & a_2+a_3 & 0 & 0 \\ b_1+b_4 & b_2+b_3 & 0 & 0 \\ b_4 & b_3 & b_2-b_3 & b_1-b_4 \\ a_4 & a_3 & a_2-a_3 & a_1-a_4 \end{vmatrix}$$

*) Jacobi Det. 5.

$$= \begin{vmatrix} a_1+a_4 & a_2+a_3 \\ b_1+b_4 & b_2+b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1-a_4 & a_2-a_3 \\ b_1-b_4 & b_2-b_3 \end{vmatrix}.$$

7. Wenn das System der n^2 Elemente $a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ so beschaffen ist, dass eine partiale Determinante $m$ten Grades z. B.

$$p = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{m,m}$$

nicht verschwindet, dagegen die $(n-m)^2$ partialen Determinanten $(m+1)$ten Grades verschwinden, welche aus

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,m} & a_{1,k} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,m} & a_{m,k} \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,m} & a_{i,k} \end{vmatrix} = b_{1,i}\, a_{1,k} + \ldots + b_{m,i}\, a_{m,k} + p a_{i,k}$$

dadurch entstehn, dass man für i und k alle Numern von $m+1$ bis n setzt, so verschwinden alle partialen Determinanten $(m+1)$ten Grades und der höhern Grade*).

Beweis. Werden $m+1$ beliebige Numern der Reihe $1, 2, \ldots, n$ durch $f, g, h, \ldots$ und durch $s, t, u, \ldots$ bezeichnet, so ist

$$P = \begin{vmatrix} a_{fs} & a_{ft} & a_{fu} & \cdot \\ a_{gs} & a_{gt} & a_{gu} & \cdot \\ a_{hs} & a_{ht} & a_{hu} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

eine beliebige partiale Determinante $(m+1)$ten Grades, deren Verschwinden aus den gemachten Voraussetzungen sich ergiebt wie folgt. Man verwandle P in eine Determinante $(2m+1)$ten Grades P', indem man m Colonnen von je $m+1$ Nullen und m Zeilen von je $2m+1$ Elementen

$$\begin{matrix} a_{1s} & a_{1t} & a_{1u} & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ a_{2s} & a_{2t} & a_{2u} & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ a_{3s} & a_{3t} & a_{3u} & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \end{matrix}$$

hinzufügt (§. 2, 6). Multiplicirt man die erste Zeile von P' mit p, und addirt man dazu die mit b_{1f}, b_{2f}, b_{3f}, .. multiplicirten letzten m Zeilen, so erhält man in der ersten Zeile von pP'

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad b_{1f} \quad b_{2f} \quad \ldots \quad b_{mf}.$$

Denn es ist

$$p a_{i,k} + b_{1,i}\, a_{1,k} + \ldots + b_{m,i}\, a_{m,k} = 0$$

nach der Voraussetzung, wenn i und k Numern der Reihe $m+1, \ldots, n$ sind; identisch, wenn i und k Numern der Reihe

*) Kronecker briefl. Mittheilung 1864 März.

1, 2, .., m sind (§. 2, 4). Zugleich verschwinden identisch unter den Coefficienten $b_{1,i}, \ldots, b_{m,i}$ diejenigen, deren i in der Reihe 1, 2, .., m enthalten und von der voranstehenden Numer verschieden ist, während $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{mm}$ den Werth $-p$ haben. Durch dieselbe Transformation der 2ten, .., $(m+1)$ten Zeile von P' findet man endlich

$$p^{m+1}P' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{1f} & b_{2f} & b_{3f} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{1g} & b_{2g} & b_{3g} & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{1h} & b_{2h} & b_{3h} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{1s} & a_{1t} & a_{1u} & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ a_{2s} & a_{2t} & a_{2u} & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ a_{3s} & a_{3t} & a_{3u} & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = 0 \quad (6).$$

8. Um die Determinante $(m+n)$ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,m} & e_{1,1} & \ldots & e_{1,n} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,m} & e_{m,1} & \ldots & e_{m,n} \\ 0 & \ldots & 0 & b_{1,1} & \ldots & b_{n,1} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & b_{1,m} & \ldots & b_{n,m} \\ a_{m+1,1} & \ldots & a_{m+1,m} & e_{m+1,1} & \ldots & e_{m+1,n} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,m} & e_{n,1} & \ldots & e_{n,n} \end{vmatrix}$$

deren Elemente $e_{1,1} \ldots e_{n,n}$ so angenommen werden, dass $e_{i,k}$ den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem i und k gleich oder ungleich sind, zu entwickeln, bilde man aus den ersten m Colonnen eine beliebige nicht verschwindende partiale Determinante $m$ten Grades

$$A = \Sigma \pm a_{f1}\, a_{g2} \ldots a_{lm}.$$

Um den Coefficienten B, welchen A in R besitzt, zu finden, permutire man die von den Elementen b unabhängigen Zeilen, bis dass die $f$te, $g$te, ... $l$te Zeile zur 1ten, 2ten, .., $m$ten gemacht ist und die übrigen Zeilen folgen; dann nehme man dieselben Vertauschungen der von den Elementen a unabhängigen Colonnen vor. Hierdurch hat die Determinante R keinen Wechsel erlitten, und in jede Stelle des Systems, welche ein Element e mit 2 gleichen Numern enthielt, ist wiederum ein solches

Element eingetreten. Also ist der Coefficient B die Determinante $n$ten Grades

$$\Sigma \pm b_{1f}\, b_{2g} \,..\, b_{ml}\, e_{rr}\, e_{ss} \,.. = \Sigma \pm b_{1f}\, b_{2g} \,..\, b_{ml} \quad (\S.\ 2,\ 7).$$

Demnach ist (4) $R = \Sigma AB$ eine Summe, deren Glieder dadurch entstehn, dass man für $f, g, .., l$ alle Combinationen von m verschiedenen Numern der Reihe $1, 2, .., n$ setzt.

9. Aus der Reihe $1, 2, .., n$ können m verschiedene Numern auf

$$\mu = \binom{n}{m}$$

verschiedene Arten gewählt werden. Diese Combinationen sollen nach Belieben die Numern $1, 2, .., \mu$ erhalten. Haben nun z. B. die Combinationen $fgh..$ und $stu..$ die Numern γ und δ, so soll die partiale Determinante $m$ten Grades

$$\Sigma \pm a_{fs}\, a_{gt}\, a_{hu} \,..$$

durch $p_{\gamma\delta}$, und deren Coefficient in $A = \Sigma \pm a_{11} .. a_{nn}$ durch $p'_{\gamma\delta}$ bezeichnet werden.

Lehrsatz. Die Summen

$$p_{\gamma 1}\, p'_{\delta 1} + p_{\gamma 2}\, p'_{\delta 2} + \cdots + p_{\gamma\mu}\, p'_{\delta\mu}$$
$$p_{1\gamma}\, p'_{1\delta} + p_{2\gamma}\, p'_{2\delta} + \cdots + p_{\mu\gamma}\, p'_{\mu\delta}$$

haben den Werth A oder 0, je nachdem die Numern γ und δ übereinstimmen oder nicht. Vergl. §. 3, 3 [*]).

Beweis. Wenn man die partialen Determinanten

$$p_{\delta 1},\quad p_{\delta 2},\ \cdots,\ p_{\delta\mu}$$

bildet und die ihnen in A zugehörigen Coefficienten durch

$$p'_{\delta 1},\quad p'_{\delta 2},\ \cdots,\ p'_{\delta\mu}$$

bezeichnet, so hat man (4)

$$A = p_{\delta 1}\, p'_{\delta 1} + p_{\delta 2}\, p'_{\delta 2} + \cdots + p_{\delta\mu}\, p'_{\delta\mu}\,.$$

Aus denselben Gründen folgt die Entwickelung

$$A = p_{1\delta}\, p'_{1\delta} + p_{2\delta}\, p'_{2\delta} + \cdots + p_{\mu\delta}\, p'_{\mu\delta}\,.$$

Die Reihe der ersten (zweiten) Numern derjenigen Elemente a, aus denen das Anfangsglied von $p_{\gamma\eta}$ besteht, bildet mit der Reihe der ersten (zweiten) Numern derjenigen Elemente, die in dem Anfangsglied von $p'_{\gamma\eta}$ vorkommen, zusammen eine Reihe von n Numern, die alle von einander verschieden sind (1). Dagegen bildet die zuerst erwählte Reihe mit der Reihe der

*) Cauchy l. c. p. 100.

ersten (zweiten) Numern derjenigen Elemente, die in dem Anfangsglied von $p'_{\delta\eta_\iota}$ vorkommen, zusammen eine Reihe von n Numern, die nicht alle von einander verschieden sind. Also ist jede von den beiden Summen

$$p_{\gamma 1}\, p'_{\delta 1} + p_{\gamma 2}\, p'_{\delta 2} + \cdots + p_{\gamma\mu}\, p'_{\delta\mu}$$
$$p_{1\gamma}\, p'_{1\delta} + p_{2\gamma}\, p'_{2\delta} + \cdots + p_{\mu\gamma}\, p'_{\mu\delta}$$

eine Entwickelung der Determinante eines Systems von n^2 Elementen, dessen parallele Reihen nicht alle von einander verschieden sind. Die Determinante eines solchen Systems verschwindet identisch (§. 2, 4).

10. Wenn die partialen Determinanten $q_{\gamma\eta_\iota}$ und $q'_{\gamma\eta_\iota}$ aus den Elementen b der Determinante

$$B = \Sigma \pm b_{11} \ldots b_{nn}$$

ebenso zusammengesetzt werden, als die partialen Determinanten $p_{\gamma\eta_\iota}$ und $p'_{\gamma\eta_\iota}$ aus den Elementen a der Determinante (9)

$$A = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}\,;$$

und wenn man aus beiden Systemen die Determinanten $n$ten Grades

$$t_{\gamma\delta} = p_{\gamma 1}\, q'_{\delta 1} + p_{\gamma 2}\, q'_{\delta 2} + \cdots + p_{\gamma\mu}\, q'_{\delta\mu}$$
$$u_{\gamma\delta} = q_{\gamma 1}\, p'_{\delta 1} + q_{\gamma 2}\, p'_{\delta 2} + \cdots + q_{\gamma\mu}\, p'_{\delta\mu}$$

ableitet, so hat die Summe der Producte

$$t_{\gamma 1}\, u_{1\delta} + t_{\gamma 2}\, u_{2\delta} + \cdots + t_{\gamma\mu}\, u_{\mu\delta}$$

den Werth AB oder 0, je nachdem die Numern γ und δ übereinstimmen oder nicht *).

Beweis. Aus dem System

$$t_{\gamma 1} = p_{\gamma 1}\, q'_{11} + \cdots + p_{\gamma\mu}\, q'_{1\mu}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_{\gamma\mu} = p_{\gamma 1}\, q'_{\mu 1} + \cdots + p_{\gamma\mu}\, q'_{\mu\mu}$$

findet man nach (9)

$$t_{\gamma 1}\, q_{11} + \cdots + t_{\gamma\mu}\, q_{\mu 1} = p_{\gamma 1}\, B$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_{\gamma 1}\, q_{1\mu} + \cdots + t_{\gamma\mu}\, q_{\mu\mu} = p_{\gamma\mu}\, B\,.$$

Indem man die Zeilen dieses Systems mit $p'_{\delta 1}, \ldots p'_{\delta\mu}$ multiplicirt und dann colonnenweise addirt, erhält man

$$t_{\gamma 1}\,(q_{11}\, p'_{\delta 1} + \cdots + q_{1\mu}\, p'_{\delta\mu}) + \cdots + t_{\gamma\mu}\,(q_{\mu 1}\, p'_{\delta 1} + \cdots + q_{\mu\mu}\, p'_{\delta\mu})$$
$$= (p_{\gamma 1}\, p'_{\delta 1} + \cdots + p_{\gamma\mu}\, p'_{\delta\mu})\, B$$

d. i. AB oder 0, w. z. b. w.

---

*) Sylvester Philos. Mag. 1851 II p. 142 und 1852 II p. 342. Beweis von Brioschi Det. 63).

§. 5. Producte von Determinanten.

1. **Lehrsatz.** Wenn aus zwei gegebenen Systemen von Elementen

$$\begin{matrix} a_{11} & .. & a_{1p} \\ . & & .. \\ a_{n1} & .. & a_{np} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b_{11} & .. & b_{1p} \\ . & & .. \\ b_{n1} & .. & b_{np} \end{matrix}$$

ein drittes System von Elementen gebildet ist

$$\begin{matrix} c_{11} & .. & c_{1n} \\ . & & .. \\ c_{n1} & .. & c_{nn} \end{matrix},$$

nämlich das $k$te Element der $i$ten Zeile c_{ik} dadurch, dass man die Elemente der $i$ten Zeile im ersten System

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad .. \quad a_{ip}$$

der Reihe nach mit den Elementen der $k$ten Zeile im zweiten System

$$b_{k1} \quad b_{k2} \quad .. \quad b_{kp}$$

multiplicirt und die Producte addirt, d. h.

$$c_{ik} = a_{i1}\, b_{k1} + a_{i2}\, b_{k2} + .. + a_{ip}\, b_{kp},$$

so kann die Determinante $R = \Sigma \pm c_{11} .. c_{nn}$ des abgeleiteten Systems aus Determinanten von Systemen der gegebenen Elemente berechnet werden.

Man bilde aus einer beliebigen Combination von n Colonnen des ersten Systems die Determinante P, und aus P durch Vertauschung von a mit b die Determinante Q, deren Elemente dem zweiten System angehören. Dann ist $R = \Sigma PQ$ die Summe aller $\binom{p}{n}$ möglichen Producte PQ. Wenn $p = n$, so reducirt sich R auf das eine Product PQ. Wenn $p < n$, so verschwindet R identisch*).

Beweis. Wenn jede der n Numern $r, s, t, ..$ der Reihe nach die Werthe $1, 2, ... p$ erhält, so ist nach Voraussetzung das Anfangsglied der Determinante R

---

*) Binet und Cauchy (in den gleichzeitigen Abhandlungen J. de l'éc. polyt. Cah. 16 p. 286 und Cah. 17 p. 81, 107) haben diesen Satz durch Betrachtung der besondern Fälle, welche Lagrange (Mém. de l'acad. de Berlin 1773 p. 285) und Gauss (Disquis. arithm. 157. 159. 268, I) gegeben hatten, abgeleitet. Vergl. Jacobi Det. 13 und 14.

$$c_{11}\, c_{22} \ldots c_{nn} = \sum_r a_{1r}\, b_{1r} \sum_s a_{2s}\, b_{2s} \sum_t a_{3t}\, b_{3t} \ldots$$
$$= \sum_{r,s,t,} a_{1r}\, a_{2s}\, a_{3t} \ldots b_{1r}\, b_{2s}\, b_{3t} \ldots .$$

Daraus entspringen die übrigen Glieder von R, indem die zweiten Numern der Elemente c permutirt werden, während die ersten Numern unbeweglich bleiben. Bei diesem Verfahren werden aber unter dem Summenzeichen nur die ersten Numern der Elemente b permutirt, die andern erleiden keine Veränderung. Daher ist

$$R = \sum_{r,s,t\ldots} a_{1r}\, a_{2s}\, a_{3t} \ldots \sum \pm b_{1r}\, b_{2s}\, b_{3t} \ldots$$
$$= \sum_{r,s,t,\ldots} a_{1r}\, a_{2s}\, a_{3t} \ldots Q .$$

Die Determinante Q verschwindet, wenn unter den Numern $r, s, t \ldots$ zwei gleiche vorkommen (§. 2, 4). Mithin erhält man alle Glieder der zu bildenden Summe, wenn man für $r, s, t, \ldots$ alle Complexionen von je n verschiedenen Numern aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ setzt.

Ist nun $p < n$, so ist $R = 0$. Denn $r, s, t, \ldots$, die aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ zu nehmen sind und deren Anzahl n ist, können nicht alle von einander verschieden sein; folglich ist Q bei jeder möglichen Wahl von $r, s, t \ldots$ identisch $= 0$.

Ist $p = n$, so können für $r, s, t, \ldots$ nur die verschiedenen Permutationen von $1, 2, \ldots, n$ gesetzt werden, weil bei jeder andern Bestimmung Q identisch verschwinden würde. Durch Permutation der Numern $r, s, t, \ldots$ wird aber Q entweder in Q oder in $-Q$ verwandelt (§. 2, 4), folglich umfasst die mit R bezeichnete Summe alle Glieder der Determinante $\sum \pm a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$ mit dem Factor Q behaftet, d. h.

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ . & & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} .$$

Ist $p > n$, so können für die Complexion der Numern $r, s, t, \ldots$ zunächst alle Combinationen von je n aus der Reihe $1, 2, \ldots p$ gesetzt werden. Dadurch findet man $\binom{p}{n}$ Glieder der zu bildenden Summe, aus denen die übrigen sich ableiten lassen, indem man für jede Combination $r, s, t, \ldots$ ihre Permutationen setzt. Nach den im Falle $p = n$ gemachten Bemerkungen bildet

jedes der $\binom{p}{n}$ Glieder im Verein mit den aus ihm abgeleiteten Gliedern das Product von zwei Determinanten PQ, also ist

$$R = \Sigma \begin{vmatrix} a_{1r} & a_{1s} & a_{1t} & . \\ a_{2r} & a_{2s} & a_{2t} & . \\ a_{3r} & a_{3s} & a_{3t} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1r} & b_{1s} & b_{1t} & . \\ b_{2r} & b_{2s} & b_{2t} & . \\ b_{3r} & b_{3s} & b_{3t} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix},$$

wo für $r, s, t \ldots$ alle Combinationen von je n aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, p$ zu setzen sind.

Beispiel. Wenn

$$d_{ik} = a_i f_k + b_i g_k + c_i h_k$$

so ist

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & h_1 \\ f_2 & h_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_1 & h_1 \\ g_2 & h_2 \end{vmatrix}.$$

2. Wenn insbesondere die Elemente b den mit denselben Numern versehenen Elementen a gleich sind, so ist das System der Elemente c symmetrisch, d. h.

$$c_{ik} = a_{i1} a_{k1} + a_{i2} a_{k2} + \ldots + a_{ip} a_{kp} = c_{ki},$$

folglich

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ . & & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} a_{1r} & a_{1s} & a_{1t} & . \\ a_{2r} & a_{2s} & a_{2t} & . \\ a_{3r} & a_{3s} & a_{3t} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}^2$$

worin man für $r, s, t, \ldots$ alle Combinationen von je n aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ zu setzen hat, um alle Glieder der Summe zu erhalten.

So lange die Elemente a real sind, ist die Determinante $\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{nn}$ positiv und kann nur dadurch verschwinden, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1r} & a_{1s} & a_{1t} & . \\ a_{2r} & a_{2s} & a_{2t} & . \\ a_{3r} & a_{3s} & a_{3t} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

bei allen Combinationen $r, s, t \ldots$ verschwindet*). Die besonderen Fälle

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & xx_1+yy_1+zz_1 & xx_2+yy_2+zz_2 \\ x_1x+y_1y+z_1z & x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \\ x_2x+y_2y+z_2z & x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1 & x_2^2+y_2^2+z_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & xx_1+yy_1+zz_1 \\ xx_1+yy_1+zz_1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & z \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}^2$$

sind bereits von LAGRANGE (sur les pyr. 3 u. 4) gefunden worden.

3. Der Hauptsatz über die Zerlegung einer Determinante, deren Elemente Summen von Producten der angegebenen Art sind (1), kann auf den LAPLACE'schen Determinantensatz zurückgeführt werden wie folgt**).

Man verwandle die Determinante $\Sigma \pm c_{11} \ldots c_{nn}$ in die Determinante $(n+p)$ ten Grades (§. 2. 6)

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{n1} & b_{11} & \ldots & b_{1p} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{1n} & \ldots & c_{nn} & b_{n1} & \ldots & b_{np} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Indem man nun von der $i$ten Colonne die letzten p der Reihe nach mit $a_{i1}, a_{i2}, \ldots$ multiplicirten Colonnen subtrahirt, und auf diese Weise die ersten n Colonnen transformirt, erhält man zufolge der Voraussetzung

$$c_{ik} = a_{i1}\, b_{k1} + a_{i2}\, b_{k2} + \ldots + a_{ip}\, b_{kp}$$

den Ausdruck für $\Sigma \pm c_{11} \ldots c_{nn}$

$$\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & b_{11} & \ldots & b_{1p} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & b_{n1} & \ldots & b_{np} \\ -a_{11} & \ldots & -a_{n1} & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -a_{1p} & \ldots & -a_{np} & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Multiplicirt man endlich jede der ersten n Colonnen mit -1, und rückt die zweiten n Zeilen des Systems an den Anfang, so erhält man (nach $n+n^2$ Zeichenwechseln)

---

*) JACOBI l. c.

**) GORDAN nach briefl. Mittheilung des Hrn. Prof. CLEBSCH 1863 Nov.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{n1} & 1 & . & . & 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{1n} & . & . & a_{nn} & 0 & . & . & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & b_{11} & . & . & b_{1n} & b_{1,n+1} & . & . & b_{1p} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & b_{n1} & . & . & b_{nn} & b_{n,n+1} & . & . & b_{np} \\ a_{1,n+1} & . & . & a_{n,n+1} & 0 & . & . & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{1p} & . & . & a_{np} & 0 & . & . & 0 & 0 & . & . & 1 \end{vmatrix}$$

Die Entwickelung dieser Determinante in eine Summe von Producten aus partialen Determinanten $n$ten Grades ist §. 4, 8 gezeigt worden.

4. Das Product von zwei Determinanten $n$ten Grades P und Q ist eine Determinante R desselben Grades, die man auf 4 im Allgemeinen verschiedene Arten darstellen kann*), indem man ihre Elemente entweder aus je einer Zeile von P und einer Zeile von Q zusammensetzt, oder aus je einer Zeile von P und einer Colonne von Q, oder aus je einer Colonne von P und einer Zeile von Q, oder aus je einer Colonne von P und einer Colonne von Q. Wenn nämlich

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{vmatrix} b_{11} & . & . & b_{1n} \\ . & & . & . \\ b_{n1} & . & . & b_{nn} \end{vmatrix}$$

so ist (1)

$$R = \begin{vmatrix} c_{11} & . & . & c_{1n} \\ . & & . & . \\ c_{n1} & . & . & c_{nn} \end{vmatrix} = PQ$$

unter der Voraussetzung

$$c_{ik} = a_{i1}\, b_{k1} + a_{i2}\, b_{k2} + \ldots + a_{in}\, b_{kn}\,.$$

Folglich ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & . & . & b_{1n} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & . & . & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\, b_{11} + \ldots + a_{1n}\, b_{1n}, & a_{11}\, b_{21} + \ldots + a_{1n}\, b_{2n}, \ldots, & a_{11}\, b_{n1} + \ldots + a_{1n}\, b_{nn} \\ a_{21}\, b_{11} + \ldots + a_{2n}\, b_{1n}, & a_{21}\, b_{21} + \ldots + a_{2n}\, b_{2n}, \ldots, & a_{21}\, b_{n1} + \ldots + a_{2n}\, b_{nn} \\ . \quad .. \quad . & . \quad .. \quad . & . \quad .. \quad . \\ a_{n1}\, b_{11} + \ldots + a_{nn}\, b_{1n}, & a_{n1}\, b_{21} + \ldots + a_{nn}\, b_{2n}, \ldots, & a_{n1}\, b_{n1} + \ldots + a_{nn}\, b_{nn} \end{vmatrix}$$

---

*) Cauchy l. c. p. 83.

Nach der hierin enthaltenen Bildungsregel ist ferner

$$\begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ . & .. & . \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & .. & b_{n1} \\ . & .. & . \\ b_{1n} & .. & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\ b_{11} + .. + a_{1n}\ b_{n1}, .., a_{11}\ b_{1n} + .. + a_{1n}\ b_{nn} \\ . \quad .. \quad . \quad .. \quad . \quad .. \quad . \\ a_{n1}\ b_{11} + .. + a_{nn}\ b_{n1}, .., a_{n1}\ b_{1n} + .. + a_{nn}\ b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{n1} \\ . & .. & . \\ a_{1n} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & .. & b_{1n} \\ . & .. & . \\ b_{n1} & .. & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\ b_{11} + .. + a_{n1}\ b_{1n}, .., a_{11}\ b_{n1} + .. + a_{n1}\ b_{nn} \\ . \quad .. \quad . \quad .. \quad . \quad .. \quad . \\ a_{1n}\ b_{11} + .. + a_{nn}\ b_{1n}, .., a_{1n}\ b_{n1} + .. + a_{nn}\ b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{n1} \\ . & .. & . \\ a_{1n} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & .. & b_{n1} \\ . & .. & . \\ b_{1n} & .. & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\ b_{11} + .. + a_{n1}\ b_{n1}, .., a_{11}\ b_{1n} + .. + a_{n1}\ b_{nn} \\ . \quad .. \quad . \quad .. \quad . \quad .. \quad . \\ a_{n1}\ b_{11} + .. + a_{nn}\ b_{n1}, .., a_{1n}\ b_{1n} + .. + a_{nn}\ b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die links stehenden Determinanten, deren Product gebildet wurde, sind von P und Q nicht verschieden (§. 2, 3). Also sind die rechts stehenden Determinanten von R nicht verschieden, d. h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ . & .. & \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & .. & b_{1n} \\ . & .. & \\ b_{n1} & .. & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & .. & c_{1n} \\ . & .. & \\ c_{n1} & .. & c_{nn} \end{vmatrix},$$

wenn c_{ik} eine der Summen

$$a_{i1}\ b_{k1} + a_{i2}\ b_{k2} + .. + a_{in}\ b_{kn},$$
$$a_{i1}\ b_{1k} + a_{i2}\ b_{2k} + .. + a_{in}\ b_{nk},$$
$$a_{1i}\ b_{k1} + a_{2i}\ b_{k2} + .. + a_{ni}\ b_{kn},$$
$$a_{1i}\ b_{1k} + a_{2i}\ b_{2k} + .. + a_{ni}\ b_{nk}$$

bedeutet.

5. Das Product von beliebig vielen Determinanten ist eine Determinante, deren Grad den höchsten unter den gegebenen Graden nicht übersteigt und deren Elemente ganze rationale Functionen der gegebenen Elemente sind*). Wenn nämlich die Grade der gegebenen Determinanten den $n$ten Grad nicht übersteigen, so kann man alle Determinanten als solche $n$ten Grades darstellen und dann nach der Regel (4) die erste mit der zweiten multipliciren, das Product mit der dritten u. s. f.

Nach §. 2, 6 ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1m} \\ . & .. & \\ a_{m1} & .. & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ . & .. & \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{vmatrix},$$

*) Jacobi Det. 13.

wenn für $i > m$ das Element a_{ik} den Werth 0 oder 1 hat, je nachdem $k < i$ oder $k = i$ ist; die übrigen nicht gegebenen Elemente bleiben unbestimmt. Daher ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1m} \\ . & .. & \\ a_{m1} & .. & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & .. & b_{1n} \\ . & .. & \\ b_{n1} & .. & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ . & .. & \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & .. & b_{1n} \\ . & .. & \\ b_{n1} & .. & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & .. & c_{1n} \\ . & .. & \\ c_{n1} & .. & c_{nn} \end{vmatrix},$$

wenn

$$c_{ik} = a_{i1}\ b_{k1} + a_{i2}\ b_{k2} + .. + a_{in}\ b_{kn}.$$

Von diesem Aggregat bleiben für $i > m$ nur die Glieder

$$b_{ki} + a_{i,i+1}\ b_{k,i+1} + .. + a_{in}\ b_{kn}.$$

Wenn die unbestimmten Elemente sämmtlich verschwinden, so erhält man

$$c_{ik} = a_{i1}\ b_{k1} + a_{i2}\ b_{k2} + .. + a_{im}\ b_{km},$$

wovon für $i > m$ nur b_{ki} übrig bleibt.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_0 & q_0 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0p_0 + b_0q_0 & a_0p_1 + b_0q_1 & c_0 & d_0 \\ a_1p_0 + b_1q_0 & a_1p_1 + b_1q_1 & c_1 & d_1 \\ a_2p_0 + b_2q_0 & a_2p_1 + b_2q_1 & c_2 & d_2 \\ a_3p_0 + b_3q_0 & a_3p_1 + b_3q_1 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

6. Wenn $A = \Sigma \pm a_{11} .. a_{nn}$, $B = \Sigma \pm b_{11} .. b_{nn}$ und

$$c_{ik} = a_{i1}\ b_{k1} + .. + a_{in}\ b_{kn}$$

so dass die Determinante des zusammengesetzten Systems (1)

$$C = \Sigma \pm c_{11} .. c_{nn} = AB$$

ist; wenn ferner die Coefficienten der Elemente a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} in A, B, C durch α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} bezeichnet werden (§. 3); wenn überhaupt partiale Determinanten $m$ten Grades der drei Systeme in der oben (§. 4, 9) angegebenen Bedeutung durch $p_{\gamma\delta}$, $q_{\gamma\delta}$, $r_{\gamma\delta}$ bezeichnet werden, so ist*)

$$\gamma_{ik} = \alpha_{i1}\ \beta_{k1} + .. + \alpha_{in}\ \beta_{kn}$$

$$r_{\gamma\delta} = p_{\gamma 1}\ q_{\delta 1} + .. + p_{\gamma\mu}\ q_{\delta\mu}$$

$$\Sigma \pm \gamma_{11} .. \gamma_{nn} = \Sigma \pm \alpha_{11} .. \alpha_{nn}\ \Sigma \pm \beta_{11} .. \beta_{nn}$$

$$\Sigma \pm r_{11} .. r_{\mu\mu} = \Sigma \pm p_{11} .. p_{\mu\mu}\ \Sigma \pm q_{11} .. q_{\mu\mu}.$$

Wenn insbesondere das zweite System mit dem ersten übereinstimmt d. h. $b_{ik} = a_{ik}$, so ist das zusammengesetzte System symmetrisch, und man hat

*) Cauchy l. c. p. 90. 107. 108.

$$\gamma_{ii} = \alpha_{i1}^2 + \ldots + \alpha_{in}^2$$
$$r_{\delta\delta} = p_{\delta 1}^2 + \ldots + p_{\delta\mu}^2$$
$$\Sigma \pm \gamma_{11} \ldots \gamma_{nn} = (\Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn})^2$$
$$\Sigma \pm r_{11} \ldots r_{\mu\mu} = (\Sigma \pm p_{11} \ldots p_{\mu\mu})^2 .$$

Beweis. Nach den angenommenen Bezeichnungen ist die partiale Determinante $m$ten Grades

$$r_{\gamma\delta} = \Sigma \pm c_{fs}\, c_{gt}\, c_{hu} \ldots$$

und ihr Anfangsglied

$$c_{fs}\, c_{gt}\, c_{hu} \ldots = \Big(\sum_i a_{fi}\, b_{si}\Big)\Big(\sum_k a_{gk}\, b_{tk}\Big)\Big(\sum_l a_{hl}\, b_{ul}\Big) \ldots$$
$$= \sum_{i,k,l,\ldots} a_{fi}\, a_{gk}\, a_{hl} \ldots b_{si}\, b_{tk}\, b_{ul} \ldots$$

Indem man die Numern $s, t, u, \ldots$ unter einander vertauscht, findet man

$$r_{\gamma\delta} = \sum_{i,k,l,\ldots} (a_{fi}\, a_{gk}\, a_{hl} \ldots \Sigma \pm b_{si}\, b_{tk}\, b_{ul} \ldots) .$$

Um die Glieder dieser Summe zu bilden, braucht man für $i, k, l, \ldots$ nur je m verschiedene Numern der Reihe $1, 2, \ldots, n$ zu setzen, weil die Determinante $\Sigma \pm b_{si}\, b_{tk}\, b_{ul} \ldots$ verschwindet, wenn die Numern $i, k, l, \ldots$ nicht alle von einander verschieden sind. Wenn man aber für bestimmte Numern $i, k, l, \ldots$ deren Permutationen setzt, so erleidet $\Sigma \pm b_{si}\, b_{tk}\, b_{ul} \ldots$ nur einen oder mehrere Zeichenwechsel, also ist

$$r_{\gamma\delta} = \sum_{i,k,l,\ldots} \Sigma \pm a_{fi}\, a_{gk}\, a_{hl} \ldots \Sigma \pm b_{si}\, b_{tk}\, b_{ul} \ldots$$

eine Summe, deren Glieder gebildet werden, indem man für $i, k, l, \ldots$ alle Combinationen von je m verschiedenen Numern der Reihe $1, 2, \ldots, n$ setzt, d. h. nach der angenommenen Bezeichnung

$$p_{\gamma 1}\, q_{\delta 1} + p_{\gamma 2}\, q_{\delta 2} + \ldots + p_{\gamma\mu}\, q_{\delta\mu} .$$

Aus dem gefundenen Werth von $r_{\gamma\delta}$ folgt nach (1) der Werth der Determinante μten Grades $\Sigma \pm r_{11} \ldots r_{\mu\mu}$. Die Grössen α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} sind partiale Determinanten $(n-1)$ten Grades, folglich u. s. w.

§. 6. Determinanten von adjungirten Systemen.

1. Wenn α_{ik} den Coefficienten des Elements a_{ik} in der Determinante

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

bedeutet, so heisst das System der Elemente

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \cdot\ \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdot\ \cdot & \alpha_{nn} \end{matrix}$$

dem System der Elemente a adjungirt*).

Lehrsatz. Die Determinante des Systems von Elementen, welches einem System von n^2 Elementen adjungirt ist, ist die $(n-1)$te Potenz der Determinante des gegebenen Systems**).

Beweis. Wenn man das Product

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot\ \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdot\ \cdot & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

nach der Multiplicationsregel (§. 5, 4) bildet, so erhält man

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\ \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot\ \cdot & c_{nn} \end{vmatrix}$$

worin

$$c_{ik} = \alpha_{i1}\, a_{k1} + \alpha_{i2}\, a_{k2} + \cdot\cdot + \alpha_{in}\, a_{kn}\,.$$

Diese Elemente haben den Werth R oder 0, je nachdem k und i gleich oder verschieden sind (§. 3, 3). Also reducirt sich die Determinante ihres Systems auf das Anfangsglied $c_{11}\, c_{22} \cdot\cdot c_{nn} = R^n$ (§. 2, 7). Daher ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot\ \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \\ \alpha_{n1} & \cdot\ \cdot & \alpha_{nn} \end{vmatrix} R = R^n\,,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot\ \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \\ \alpha_{n1} & \cdot\ \cdot & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \\ a_{n1} & \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}^{n-1}.$$

---

*) Cauchy l. c. p. 64 hat diese Benennung aus der Theorie der quadratischen Formen (Gauss disquis. arithm. 267) aufgenommen.

**) Cauchy l. c. p. 82. Den Fall $n = 3$ findet man bei Lagrange sur les pyr. 5 und bei Gauss l. c.

2. Lehrsatz. Eine partiale Determinante des adjungirten Systems vom $m$ten Grade ist das Product von R^{m-1} mit dem Coefficienten, welchen die entsprechende partiale Determinante des ursprünglichen Systems in R hat *).

Beweis. Wenn

$$f, g, \ldots, r, s, \ldots$$
$$i, k, \ldots, u, v, \ldots$$

gegebene Permutationen von $1, 2, \ldots, n$ sind und darin $f, g, \ldots$ und $i, k, \ldots$ Gruppen von m Numern bedeuten, während die übrigen $n-m$ Numern durch $r, s, \ldots$ und $u, v, \ldots$ bezeichnet werden, so ist die Determinante $m$ten Grades

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} & \cdot \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

eine partiale Determinante des adjungirten Systems (§. 4, 1), welche nach §. 2, 6 in folgende Determinante $n$ten Grades transformirt werden kann:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} & \cdot\,\cdot & \alpha_{fu} & \alpha_{fv} & \cdot\,\cdot \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} & \cdot\,\cdot & \alpha_{gu} & \alpha_{gv} & \cdot\,\cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \cdot\,\cdot & 1 & 0 & \cdot\,\cdot \\ 0 & 0 & \cdot\,\cdot & 0 & 1 & \cdot\,\cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist aber

$$\begin{vmatrix} a_{fi} & a_{fk} & \cdot\,\cdot & a_{fu} & a_{fv} & \cdot \\ a_{gi} & a_{gk} & \cdot\,\cdot & a_{gu} & a_{gv} & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ a_{ri} & a_{rk} & \cdot\,\cdot & a_{ru} & a_{rv} & \cdot \\ a_{si} & a_{sk} & \cdot\,\cdot & a_{su} & a_{sv} & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \varepsilon R,$$

wo ε den Werth 1 oder -1 hat, je nachdem die gegebenen Permutationen in eine Classe gehören oder nicht (§. 2, 4). Wenn man das Product dieser beiden Determinanten durch zeilenweise Multiplication bildet, so findet man die Determinante $n$ten Grades

*) Jacobi Det. 11. Dieser Beweis ist von Borchardt angegeben worden (Briefl. Mittheilung 1853 Juli).

$$\begin{vmatrix} R & 0 & . & . & a_{fu} & a_{fv} & . & . \\ 0 & R & . & . & a_{gu} & a_{gv} & . & . \\ . & . & & & . & . & & \\ 0 & 0 & . & . & a_{ru} & a_{rv} & . & . \\ 0 & 0 & . & . & a_{su} & a_{sv} & . & . \\ . & . & & & . & . & & \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante reducirt sich aber auf das Product von zwei Determinanten (§. 4, 6), deren erste den Werth R^m hat (§. 2, 7). Daher ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} & . \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} & . \\ . & . & \end{vmatrix} = R^{m-1}\varepsilon \begin{vmatrix} a_{ru} & a_{rv} & . \\ a_{su} & a_{sv} & . \\ . & . & \end{vmatrix}.$$

Nach §. 4, 1 bedeutet

$$\varepsilon \begin{vmatrix} a_{ru} & a_{rv} & . \\ a_{su} & a_{sv} & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

den Coefficienten, mit welchem in R die partiale Determinante des gegebenen Systems

$$\begin{vmatrix} a_{fi} & a_{fk} & . \\ a_{gi} & a_{gk} & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

versehen ist, deren Elemente mit denen der gesuchten Determinante in Hinsicht der Numern übereinstimmen.

Beispiele. Wenn $R = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \,..\, a_{nn}$, so ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & . & . & \alpha_{1m} \\ . & & . & . \\ \alpha_{m1} & . & . & \alpha_{mm} \end{vmatrix} = R^{m-1} \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & . & . & a_{m+1,n} \\ . & & . & . \\ a_{n,m+1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{k+1,k+1} & . & . & \alpha_{k+1,n} \\ . & & . & . \\ \alpha_{n,k+1} & . & . & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = R^{n-k-1} \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1k} \\ . & . & . & . \\ a_{k1} & . & . & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Wenn insbesondere $n = 5$ ist, so ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{41} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \\ \alpha_{51} & \alpha_{53} & \alpha_{54} \end{vmatrix} = -R^2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{32} & a_{35} \end{vmatrix},$$

weil die Permutationen

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{matrix}$$

nicht in eine Classe gehören.

Dagegen ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{41} & \alpha_{43} \end{vmatrix} = R \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

weil

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{matrix}$$

Permutationen derselben Classe sind.

Der Coefficient des Elements α_{ik} in der Determinante des adjungirten Systems $\Sigma \pm \alpha_{11}\, \alpha_{22} \,.\,.\, \alpha_{nn}$ ist

$$R^{n-2}\, a_{ik}\ ^{*)}.$$

Denn dieser Coefficient ist eine partiale Determinante des adjungirten Systems vom $(n-1)$ten Grade und der Coefficient, welchen die entsprechende partiale Determinante des ursprünglichen Systems in R hat, ist a_{ik}, folglich u. s. w. (2).

Wenn insbesondere $n = 3$, so ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = R a_{33}\,, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} = R a_{31} \text{ u. s. w. } ^{**)}.$$

3. Um eine partiale Determinante zweiten Grades im adjungirten System zu berechnen, z. B.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} \end{vmatrix},$$

bedarf man des Coefficienten, welchen die entsprechende Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{fi} & a_{fk} \\ a_{gi} & a_{gk} \end{vmatrix}$$

in R hat. Dieser Coefficient stimmt mit demjenigen überein, welchen das Product $a_{fi}\, a_{gk}$ in R hat (§. 4, 1). Folglich ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} \end{vmatrix} = R \frac{\partial^2 R}{\partial a_{fi}\, \partial a_{gk}}\ ^{***)}.$$

Ebenso ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} & \alpha_{fl} \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} & \alpha_{gl} \\ \alpha_{hi} & \alpha_{hk} & \alpha_{hl} \end{vmatrix} = R^2 \frac{\partial^3 R}{\partial a_{fi}\, \partial a_{gk}\, \partial a_{hl}} \text{ u. s. f.}$$

---

*) Cauchy l. c. p. 82.

**) Lagrange sur les pyr. 3.

***) Jacobi Det. 10.

Diese Identitäten geben zugleich an, wie man zweite, dritte, .. partiale Differentialquotienten einer Determinante durch erste partiale Differentialquotienten derselben ausdrücken kann.

Beispiel. Weil (§. 3, 15) $dR = \sum_{i,k} \alpha_{ik}\, da_{ik}$ und

$$d\alpha_{rs} = \sum_{i,k} \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial a_{ik}}\, da_{ik} = \sum_{i,k} \frac{\partial^2 R}{\partial a_{rs}\, \partial a_{ik}}\, da_{ik}$$

$$R\, d\alpha_{rs} = \sum_{i,k} (\alpha_{rs}\, \alpha_{ik} - \alpha_{is}\, \alpha_{rk})\, da_{ik}$$

ist, so findet man

$$R\, d\alpha_{rs} - \alpha_{rs}\, dR = - \sum_{i,k} \alpha_{is}\, \alpha_{rk}\, da_{ik}$$

$$R^2 d\, \frac{\alpha_{rs}}{R} = - \sum_{i,k} \alpha_{is}\, \alpha_{rk}\, da_{ik}\ ^{*)}.$$

4. Bezeichnet man in der Determinante

$$V_{r+1} = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{r+1,r+1}$$

den Coefficienten des Elements a_{ik} durch α_{ik}, so ist

$$\alpha_{r+1,r+1} = V_r\,, \qquad \frac{\partial^2 V_{r+1}}{\partial a_{rr}\, \partial a_{r+1,r+1}} = V_{r-1}$$

folglich (3)

$$\alpha_{rr}\, V_r - \alpha_{r,r+1}\, \alpha_{r+1,r} = V_{r+1}\, V_{r-1}\,.$$

Wenn insbesondere die correspondirenden Elemente a_{ik} und a_{ki} gleich oder conjugirt complex sind, so ist das Product $\alpha_{r,r+1}\, \alpha_{r+1,r}$ real und positiv (§. 3, 13). Also haben, während V_r verschwindet, V_{r+1} und V_{r-1} Werthe von entgegengesetzten Zeichen**).

5. Wenn R verschwindet, so verschwinden auch die partialen Determinanten des adjungirten Systems vom 2ten, 3ten, .. Grade, weil sie den Factor R enthalten (2). Aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} \end{vmatrix} = 0$$

folgen die Proportionen

---

*) Weierstrass Berl. Monatsbericht 1858 p. 214.

**) Brioschi Det. p. 72.

$$\alpha_{fi} : \alpha_{fk} = \alpha_{gi} : \alpha_{gk}\,, \quad \alpha_{fi} : \alpha_{gi} = \alpha_{fk} : \alpha_{gk}$$

$$\alpha_{f1} : \alpha_{f2} : \alpha_{f3} : \ldots = \alpha_{g1} : \alpha_{g2} : \alpha_{g3} : \ldots$$

$$\alpha_{1i} : \alpha_{2i} : \alpha_{3i} : \ldots = \alpha_{1k} : \alpha_{2k} : \alpha_{3k} : \ldots\ ^{*)}$$

$$\alpha_{i1}\,\alpha_{1i} : \alpha_{i2}\,\alpha_{2i} : \alpha_{i3}\,\alpha_{3i} : \ldots = \alpha_{11} : \alpha_{22} : \alpha_{33} : \ldots$$

Wenn insbesondere die Elemente des gegebenen Systems so beschaffen sind, dass $\alpha_{ik} = \pm\, \alpha_{ki}$, so hat man unter der Voraussetzung $R = 0$ für jedes i

$$\alpha_{i1}^2 : \alpha_{i2}^2 : \alpha_{i3}^2 : \ldots = \alpha_{11} : \alpha_{22} : \alpha_{33} : \ldots$$

6. Analoge Sätze gelten für das System der partialen Determinanten $m$ten Grades, welche zu dem System der Elemente $\alpha_{11} \ldots \alpha_{nn}$ gehören,

$$\begin{matrix} p_{11} & \cdot\cdot & p_{1\mu} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ p_{\mu 1} & \cdot\cdot & p_{\mu\mu} \end{matrix}$$

von denen $p_{\gamma\delta}$ die oben §. 4, 9 angegebene Bedeutung hat, und für das (adjungirte) System der partialen Determinanten $(n-m)$ten Grades

$$\begin{matrix} p'_{11} & \cdot\cdot & p'_{1\mu} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ p'_{\mu 1} & \cdot\cdot & p'_{\mu\mu} \end{matrix}$$

von denen $p'_{\gamma\delta}$ den Coefficienten von $p_{\gamma\delta}$ in der Determinante $R = \Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn}$ bedeutet. Bei diesen Bezeichnungen hat man die Identitäten

$$\Sigma \pm p_{11} \ldots p_{\mu\mu}\, \Sigma \pm p'_{11} \ldots p'_{\mu\mu} = R^{\mu}$$

$$\Sigma \pm p_{11} \ldots p_{\mu\mu} = R^{\binom{n-1}{m-1}}\,, \quad \Sigma \pm p'_{11} \ldots p'_{\mu\mu} = R^{\binom{n-1}{m}}\ ^{**)}.$$

Beweis. Das Product $\Sigma \pm p_{11} \ldots p_{\mu\mu}\, \Sigma \pm p'_{11} \ldots p'_{\mu\mu}$ ist eine Determinante μten Grades, welche sich auf ihr Anfangsglied R^{μ} reducirt, weil ihr Element

$$p_{\gamma 1}\, p'_{\delta 1} + \ldots + p_{\gamma\mu}\, p'_{\delta\mu}$$

den Werth R oder 0 hat, je nachdem die Numern γ und δ übereinstimmen oder nicht (§. 4, 9).

Da nun R^{μ} durch $P = \Sigma \pm p_{11} \ldots p_{\mu\mu}$ theilbar und R eine Function ersten Grades eines bestimmten Elements z. B. α_{11} ist,

*) Jacobi Crelle J. 15 p. 404 und anderwärts.

**) Diese Identitäten sind die erste von Cauchy l. c. p. 102, die beiden andern von Franke Crelle J. 61 p. 350 gefunden worden.

so kann P von einer Potenz von R nur durch einen von den Elementen $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ unabhängigen Coefficienten unterschieden sein. Unter den $\mu = \binom{n}{m}$ Combinationen der Numern $1, 2, \ldots, n$ giebt es aber $\lambda = \binom{n-1}{m-1}$ solche, in denen 1 vorkommt. Es giebt also λ Zeilen und λ Colonnen des Systems $p_{11}, \ldots, p_{\mu\mu}$, deren gemeinschaftliche Elemente Functionen ersten Grades von a_{11} sind, mithin ist P eine Function λten Grades von a_{11} und durch R^{λ} theilbar. Der Quotient $P : R^{\lambda}$ ist 1, wie sich aus der Betrachtung eines besondern Falles ergiebt. Wenn z. B. alle Elemente der Diagonale $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ den Werth 1 haben und die übrigen Elemente verschwinden, so ist $R = 1$, während $p_{\gamma\delta}$ den Werth 1 oder 0 erhält, je nachdem γ und δ übereinstimmen oder nicht. Daher ist $P = 1$ und $P : R^{\lambda} = 1$.

7. Eine partiale Determinante des Systems $p_{11}, \ldots, p_{\mu\mu}$ vom ωten Grade ist das Product von $R^{\omega-(\mu-\lambda)}$ mit dem Coefficienten, welchen die entsprechende partiale Determinante des Systems $p'_{11}, \ldots, p'_{\mu\mu}$ in der Determinante dieses Systems $\Sigma \pm p'_{11} \ldots p'_{\mu\mu}$ hat*).

Beweis. Wenn wie oben (2)

$$\begin{matrix} f, g, \ldots, r, s, \ldots \\ i, k, \ldots, u, v, \ldots \end{matrix}$$

Permutationen von $1, 2, \ldots, \mu$ sind und darin $f, g, \ldots$ und $i, k \ldots$ Gruppen von ω Numern bedeuten, während die übrigen $\mu - \omega$ Numern durch $r, s, \ldots$ und $u, v \ldots$ bezeichnet werden, so kann die partiale Determinante ωten Grades

$$\begin{vmatrix} p_{fi} & p_{fk} & \cdot \\ p_{gi} & p_{gk} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

in die Determinante μten Grades transformirt werden

$$\begin{vmatrix} p_{fi} & p_{fk} & \cdot\cdot & p_{fu} & p_{fv} & \cdot\cdot \\ p_{gi} & p_{gk} & \cdot\cdot & p_{gu} & p_{gv} & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 1 & 0 & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 & 1 & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

*) FRANKE Crelle J. 61 p. 350 und BORCHARDT's Bemerkung zu diesem Aufsatz.

Multiplicirt man dieselbe mit

$$\begin{vmatrix} p'_{fi} & p'_{fk} & \cdot\cdot & p'_{fu} & p'_{fv} & \cdot\cdot \\ p'_{gi} & p'_{gk} & \cdot\cdot & p'_{gu} & p'_{gv} & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ p'_{ri} & p'_{rk} & \cdot\cdot & p'_{ru} & p'_{rv} & \cdot\cdot \\ p'_{si} & p'_{sk} & \cdot\cdot & p'_{su} & p'_{sv} & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \varepsilon \Sigma \pm p'_{11} \cdot\cdot p'_{\mu\mu},$$

wobei ε den Werth 1 oder -1 hat, je nachdem die obigen Permutationen in eine Classe gehören oder nicht, so findet man (§. 4, 9)

$$\begin{vmatrix} R & 0 & \cdot\cdot & p'_{fu} & p'_{fv} & \cdot\cdot \\ 0 & R & \cdot\cdot & p'_{gu} & p'_{gv} & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & p'_{ru} & p'_{rv} & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & p'_{su} & p'_{sv} & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

Daher ist

$$\Sigma \pm p'_{11} \cdot\cdot p'_{\mu\mu} \, \Sigma \pm p_{fi} \, p_{gk} \cdot\cdot = \varepsilon R^{\lambda} \, \Sigma \pm p'_{ru} \, p'_{sv} \cdot\cdot$$

wobei $\varepsilon \Sigma \pm p'_{ru} p'_{sv} \cdot\cdot$ den Coefficienten von $\Sigma \pm p'_{fi} p'_{gk} \cdot\cdot$ in der Determinante $\Sigma \pm p'_{11} \cdot\cdot p'_{\mu\mu} = R^{\mu-\lambda}$ bedeutet.

§. 7. Determinante eines Systems, dessen correspondirende Elemente a_{ik} und a_{ki} entgegengesetzt gleich sind.

1. **Lehrsatz.** Wenn n eine gerade Zahl ist und die Elemente des Systems $a_{11} \,.\,. \, a_{nn}$ so beschaffen sind, dass

$$a_{ki} = -a_{ik} \quad \text{und} \quad a_{ii} = 0\,,$$

so ist die Determinante $R = \Sigma \pm a_{11} \,.\,. \, a_{nn}$ ein Quadrat*).

Beweis. Wenn $R_m = \Sigma \pm a_{11} \,.\,. \, a_{mm}$, so gilt bei beliebigen Elementen die Identität (§. 6, 3)

$$R_m R_{m-2} = \frac{\partial R_m}{\partial a_{m-1,m-1}} \frac{\partial R_m}{\partial a_{mm}} - \frac{\partial R_m}{\partial a_{m-1,m}} \frac{\partial R_m}{\partial a_{m,m-1}}.$$

In dem vorliegenden Falle bei geradem m ist (§. 3, 14)

*) Cayley Crelle J. 38 p. 95. Der hier mitgetheilte Beweis ist von Borchardt 1858 angegeben worden. Einen andern Beweis hat Scheibner Leipz. Berichte 1859 p. 154 geführt.

$$\frac{\partial R_m}{\partial a_{ii}} = 0\,, \qquad \frac{\partial R_m}{\partial a_{ki}} = -\frac{\partial R_m}{\partial a_{ik}}\,,$$

folglich

$$R_m\, R_{m-2} = \left(\frac{\partial R_m}{\partial a_{m-1,m}}\right)^2$$

d. h. R_m ein Quadrat, wenn R_{m-2} ein Quadrat ist. Nun ist R_2 ein Quadrat, also sind auch R_4, R_6, .. Quadrate.

2. Um die Formel zu finden, deren Quadrat die Determinante R ist, bezeichne man den Coefficienten des Elements a_{11} durch R', und den Coefficienten des Elements a_{ik} in R' durch α_{ik}. Dann ist allgemein (§. 3, 16)

$$R = a_{11}\, R' - \Sigma\, a_{i1}\, a_{1k}\, \alpha_{ik}\,,$$

wenn die Glieder der Summe dadurch gebildet werden, dass man für i und k alle Numern der Reihe $2, 3, .., n$ setzt. Bei dem vorausgesetzten System ist $R' = 0$, $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$ (§. 3, 13), folglich (§. 6, 5)

$$\alpha_{ik}^2 = \alpha_{ii}\, \alpha_{kk}\,.$$

Nun sind α_{ii} und α_{kk} Quadrate (1), also ist auch α_{ik} ein Quadrat, folglich

$$R = \Sigma\, a_{1i}\, a_{1k}\, \sqrt{\alpha_{ii}}\, \sqrt{\alpha_{kk}} = \Sigma\, a_{1i}\, \sqrt{\alpha_{ii}}\, (\Sigma\, a_{ik}\, \sqrt{\alpha_{kk}})$$
$$= (\Sigma\, a_{1i}\, \sqrt{\alpha_{ii}})^2\,,$$

wenn man die Zeichen der Wurzeln so bestimmt, dass das Product $\sqrt{\alpha_{ii}}\, \sqrt{\alpha_{kk}}$ den Werth α_{ik} (nicht $-\alpha_{ik}$) hat.

Hiernach ist $\sqrt{R}$ ein Aggregat von $(n-1)$ mal so viel Gliedern, als $\sqrt{\alpha_{ii}}$ hat. Ebenso kann man $\sqrt{\alpha_{ii}}$ in ein Aggregat von $n-3$ Gliedern zerlegen, weil α_{ii} eine Determinante $(n-2)$ ten Grades von der hier betrachteten Art ist, u. s. f. Daher ist $\sqrt{R}$ ein Aggregat von

$$(n-1)(n-3)\,..\,3\,.\,1 = \frac{1\,.\,2\,...\,n}{2^{\frac{n}{2}}\,.\,1\,.\,2\,...\,\frac{n}{2}}$$

Gliedern. Jedes Glied von $\sqrt{R}$ ist ein Product von $\frac{n}{2}$ Elementen, unter deren Numern zwei gleiche überhaupt nicht vorkommen. Als Anfangsglied findet man

$$a_{12}\, a_{34}\, \cdot\, \cdot\, a_{n-1,n}\,.$$

In der That ist

$$(a_{12}\, a_{34}\, .\, .\, a_{n-1,n})^2 = (-1)^{\frac{n}{2}}\, a_{12}\, a_{21}\, a_{34}\, a_{43}\, .\, .\, a_{n-1,n}\, a_{n,n-1}$$

ein positives Glied der Determinante R, weil die Permutationen

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & .. & n-1 & n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & .. & n & n-1 \end{matrix}$$

einer Classe angehören oder nicht, je nachdem $\frac{n}{2}$ gerade oder ungerade.

3. Lehrsatz. Die Formel $S = a_{12}\, a_{34} \,..\, a_{n-1,n} + \ldots$, deren Quadrat der vorhin betrachteten Determinante R gleichkommt, ist alternirend, d. h. sie erhält den entgegengesetzten Werth, wenn irgend zwei Numern der Elemente vertauscht werden, und verschwindet identisch, wenn zwei Numern einander gleich sind*).

Beweis. Wenn S_1 die Formel bedeutet, welche aus S durch Vertauschung der Numern i und k entspringt, so ist S_1^2 die Determinante, welche aus R durch Vertauschung derselben Numern hervorgeht. Nun kommen i und k in R sowohl unter den ersten, als auch unter den zweiten Numern vor, also wird R durch diese Vertauschung nicht verändert (§. 2, 4), d. h. $S_1^2 = S^2$. Zufolge dieser Identität sind die Glieder von S_1 den Gliedern von S der Reihe nach gleich und zwar von gleichen oder von entgegengesetzten Zeichen, je nachdem ein Glied von S_1 und das gleiche von S gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben. Bedeutet nun $a_{ik} B$ das Aggregat der Glieder von S, in denen das Element a_{ik} vorkommt, so enthält B nur solche Elemente, deren Numern von i und k verschieden sind (2), folglich geht $a_{ik} B$ durch Vertauschung von i und k in $a_{ki} B$ über. Die Glieder $a_{ik} B$ in S und $a_{ki} B$ in S_1 sind entgegengesetzt gleich, weil $a_{ki} = - a_{ik}$, folglich sind auch S und S_1 entgegengesetzt gleich.

Wenn i und k einander gleich sind, so hat S_1 sowohl den Werth $-S$ als auch den Werth S, d. h. S verschwindet identisch.

---

*) Die Formel S ist von Jacobi (Crelle J. 2 p. 354, 29 p. 236) zum Gebrauch beim Pfaff'schen Integrationsproblem construirt und neuerlich von Cayley l. c. mit dem Namen Pfaffian belegt worden. Die Eigenschaften derselben hat Jacobi ohne Beweis und ohne die fundamentale Relation $S^2 = R$ mitgetheilt.

4. Das mit dem Anfangsglied $a_{12} a_{34} \ldots a_{n-1,n}$ beginnende Aggregat S, dessen Quadrat die Determinante R ist, wird nach Jacobi durch die Reihe aller Numern der in dem Anfangsglied vorkommenden Elemente

$$(1, 2, 3, \ldots, n)$$

unzweideutig bezeichnet. Nach dem bewiesenen Lehrsatz (3) ist

$$(1, 2, 3, \ldots, n) = -(2, 1, 3, \ldots, n) = -(2, 3, \ldots, n, 1) \text{ u. s. w.}$$

Daher hat man im Allgemeinen

$$\sqrt{R} = \pm (1, 2, \ldots, n), \quad \sqrt{a_{ii}} = \pm (2, 3, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n).$$

Es ist aber nur dann auch dem Zeichen nach (2)

$$\sqrt{a_{ii}}\sqrt{a_{kk}} = a_{ik}$$

$$(1, 2, \ldots, n) = \Sigma a_{1i} \sqrt{a_{ii}}$$

wenn man die Zeichen der Wurzeln von den Numern so abhängig macht, dass

$$\sqrt{a_{ii}} = (-1)^i (2, 3, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n) = (i+1, \ldots, n, 2, \ldots, i-1).$$

Hiernach gilt zur Entwickelung von $(1, 2, \ldots, n)$ die Recursionsformel *)

$$(1, 2, \ldots, n) = a_{12}(3, \ldots, n) + a_{13}(4, \ldots, n, 2) + \ldots$$
$$+ a_{1i}(i+1, \ldots, n, 2, \ldots, i-1) + \ldots + a_{1n}(2, \ldots, n-1).$$

Beweis. Das Product $\sqrt{a_{ii}}\sqrt{a_{kk}}$ d. i. nach Voraussetzung

$$(-1)^{i+k}(2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)(2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$$

ist identisch entweder mit a_{ik} oder mit $-a_{ik}$, weil $a_{ii}a_{kk} = a_{ik}^2$. Nach Vandermonde's Bezeichnung hat man (§. 3, 1)

$$a_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} 2, \ldots, i-1, i+1, & \ldots, n \\ 2, \ldots & k-1, k+1, \ldots, n \end{vmatrix}$$

In der Reihe der ersten Numern fehlen 1 und i, in der Reihe der zweiten Numern fehlen 1 und k. Werden die übrigen $n-3$ Numern der Reihe $1, 2, \ldots, n$ durch

$$p, q, r, s, \ldots, u, v$$

bezeichnet, so erhält man aus

$$\begin{vmatrix} 2, \ldots, i-1, i+1, & \ldots n \\ 2, \ldots & k-1, k+1, \ldots n \end{vmatrix}$$

*) Jacobi und Cayley (l. c.) gebrauchen diese Identität als Definition von $(1, 2, \ldots, n)$.

durch eine bestimmte Anzahl von Zeichenwechseln (§. 2, 1)

$$\begin{vmatrix} k, & p, & q, & r, & . . , & u, & v \\ p, & q, & r, & s, & . . , & v, & i \end{vmatrix}$$

Aus dem Product

$$(2, . . , i-1, i+1, . . , n)(2, . . , k-1, k+1, . . , n)$$

erhält man durch dieselbe Anzahl von Zeichenwechseln (3)

$$(k, p, q, r, . . , u, v)(p, q, r, s, . . , v, i) .$$

Nun stimmt das Anfangsglied jener Determinante

$$a_{kp}\, a_{pq}\, a_{qr}\, a_{rs} \; . \; . \; a_{uv}\, a_{vi}$$

mit dem Anfangsglied dieses Products

$$a_{kp}\, a_{qr} \; . \; . \; a_{uv}\, a_{pq}\, a_{rs} \; . \; . \; a_{vi}$$

auch dem Zeichen nach überein. Also hat unter der gemachten Voraussetzung $\sqrt{\alpha_{ii}}\sqrt{\alpha_{kk}}$ den Werth α_{ik}, nicht $-\alpha_{ik}$, w. z. b. w.

Durch $i-2$ cyclische Vertauschungen findet man

$$\sqrt{\alpha_{ii}} = (-1)^i (2, . . , i-1, i+1, . . , n) = (i+1, . . , n, 2, . . , i-1) .$$

Beispiele.

$$\Sigma \pm a_{11} \; . \; . \; a_{44} = (1, 2, 3, 4)^2$$

$$(1, 2, 3, 4) = a_{12}\, a_{34} + a_{13}\, a_{42} + a_{14}\, a_{23} .$$

$$\Sigma \pm a_{11} \; . \; . \; a_{66} = (1, 2, . . , 6)^2$$

$$\begin{aligned} (1, 2, . . , 6) &= a_{12}(3, 4, 5, 6) + a_{13}(4, 5, 6, 2) + . . + a_{16}(2, 3, 4, 5) \\ &= a_{12}\, a_{34}\, a_{56} + a_{12}\, a_{35}\, a_{64} + a_{12}\, a_{36}\, a_{45} \\ &+ a_{13}\, a_{45}\, a_{62} + a_{13}\, a_{46}\, a_{25} + a_{13}\, a_{42}\, a_{56} \\ &+ a_{14}\, a_{56}\, a_{23} + a_{14}\, a_{52}\, a_{36} + a_{14}\, a_{53}\, a_{62} \\ &+ a_{15}\, a_{62}\, a_{34} + a_{15}\, a_{63}\, a_{42} + a_{15}\, a_{64}\, a_{23} \\ &+ a_{16}\, a_{23}\, a_{45} + a_{16}\, a_{24}\, a_{53} + a_{16}\, a_{25}\, a_{34} . \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & f & e \\ -b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad - be + cf)^2 .$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b & c \\ -a & 0 & f & e \\ b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad + be + cf)^2 .$$

5. Um den Coefficienten des Elements a_{ik} in der Formel

$$S = (1, 2, \ldots, n)$$

zu finden, bildet man

$$(-1)^{i-1} S = (i, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$$
$$= a_{i1} (2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n) + a_{i2} (3, \ldots, 1) + \ldots$$

Hieraus erkennt man den gesuchten Coefficienten

$$(-1)^{i-1} (k+1, \ldots, k-1) \text{ ohne } i \text{ und } k.$$

Derselbe Coefficient kann auch (wie §. 3, 12) durch

$$\frac{\partial S}{\partial a_{ik}}$$

ausgedrückt werden. Die Summe

$$a_{i1} \frac{\partial S}{\partial a_{k1}} + a_{i2} \frac{\partial S}{\partial a_{k2}} + \ldots + a_{in} \frac{\partial S}{\partial a_{kn}}$$

hat den Werth S oder 0, je nachdem i und k übereinstimmen oder nicht *). Denn in dem zweiten Falle entspringt die Summe dadurch, dass in $(1, \ldots, n)$ die Numer i für k gesetzt wird, wobei $(1, \ldots, n)$ verschwindet (3).

Der Differentialquotient $\frac{\partial S}{\partial a_{kk}}$ ist an sich 0.

6. Sind die Elemente der Determinante R so beschaffen, dass

$$a_{ik} = -a_{ki}, \qquad a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = z,$$

so ist zufolge der oben (§. 4, 2) gezeigten Entwickelung

$$R = z^n + z^{n-2} \Sigma D_2 + z^{n-4} \Sigma D_4 + \ldots \text{**)},$$

wenn

$$D_m = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} & \cdot \\ a_{ki} & a_{kk} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

eine partiale Determinante $m$ten Grades ist, deren Elemente den Bedingungen

$$a_{rs} = -a_{sr}, \quad a_{rr} = 0$$

*) Jacobi l. c.

**) Cayley l. c. Vergl. Crelle J. 50 p. 299.

unterliegen, und ΣD_m die Summe der Determinanten bedeutet, welche aus D_m entspringen, indem für $i, k, ..$ alle Combinationen von je m aus der Reihe $1, 2, .., n$ gesetzt werden.

Für ungerade m verschwindet D_m (§. 3, 13), für gerade m ist (4)

$$D_m = (i, k, ..)^2,$$

also ΣD_m die Summe von $\binom{n}{m}$ Quadraten.

Beispiele.

$$\begin{vmatrix} z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & z & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & z \end{vmatrix} = z^3 + z(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2).$$

$$\begin{vmatrix} z & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & z & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & z & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & z \end{vmatrix} = z^4 + z^2(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2) + (a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23})^2.$$

Zweiter Abschnitt.

Anwendungen der Determinanten.

---

§. 8. Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen.

1. Wenn $u_1, \ldots, u_n$ homogene lineare Functionen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ sind, nämlich

$$\begin{array}{l} u_1 = a_{11}\,x_1 + \ldots + a_{1n}\,x_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n = a_{n1}\,x_1 + \ldots + a_{nn}\,x_n \end{array}$$

so heisst die Determinante $n$ten Grades der Coefficienten

$$R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$$

die Determinante des Systems von linearen Functionen $u_1, \ldots, u_n$ *).

Wenn die Determinante R nicht verschwindet, so gehört zu jedem System von endlichen Werthen $u_1, \ldots, u_n$ ein bestimmtes System von endlichen Werthen $x_1, \ldots x_n$. Man findet

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} x_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1,k-1} & u_1 & a_{1,k+1} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{n,k-1} & u_n & a_{n,k+1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

indem man in R die $k$te Colonne mit x_k multiplicirt, und dann die übrigen der Reihe nach mit $x_1, x_2, \ldots$ multiplicirten Colonnen zur $k$ten Colonne addirt (§. 3, 6).

---

*) Jacobi Det. 7.

Bezeichnet man den Coefficienten des Elements a_{ik} in R durch α_{ik}, so erhält man

$$Rx_k = \alpha_{1k}\,u_1 + \,.\,.\, + \alpha_{nk}\,u_n\ ^{*}).$$

Von der Summe $\alpha_{1k}\,u_1 + \,.\,.\, + \alpha_{nk}\,u_n$ bleibt in der That nur das Glied Rx_k übrig, weil $\alpha_{1k}\,a_{1i} + \,.\,.\, + \alpha_{nk}\,a_{ni}$ den Werth 0 oder R hat, je nachdem i von k verschieden ist oder nicht (§. 3, 3).

Anmerkung. Wenn v eine andre gegebene homogene lineare Function von $x_1, \,.\,.\,, x_n$ bedeutet, so lassen sich bestimmte Multiplicatoren $C_1, \,.\,.\,, C_n$ angeben von der Art, dass

$$C_1\,u_1 + \,.\,.\, + C_n\,u_n = Rv$$

eine Identität wird.

2. Die Auflösung des vorhin betrachteten linearen Systems kann auf die Auflösung des Systems von n linearen Gleichungen

$$\begin{array}{l} a_{10}\,x_0 + a_{11}\,x_1 + \,.\,.\, + a_{1n}\,x_n = 0 \\ \quad .\qquad .\qquad .\qquad .\qquad .\qquad . \\ a_{n0}\,x_0 + a_{n1}\,x_1 + \,.\,.\, + a_{nn}\,x_n = 0 \end{array}$$

gegründet werden, indem man $x_k : x_0$ für x_k oder $x_0 = 1$ setzt.

Man bilde nach Hinzunahme einer willkürlichen Hülfsgleichung

$$a_{00}\,x_0 + a_{01}\,x_1 + \,.\,.\, + a_{0n}\,x_n = 0$$

die Determinante $(n+1)$ten Grades

$$S = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & . \; . & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & . \; . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n0} & a_{n1} & . \; . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und bezeichne den Coefficienten des Elements a_{0k} in S durch R_k.

Multiplicirt man die erste Colonne in S mit x_0, und addirt man zur ersten Colonne die übrigen der Reihe nach mit x_1, x_2, . . multiplicirten Colonnen, so verschwinden alle Elemente der ersten Colonne. Mithin verschwindet Sx_0, und da x_0 nicht verschwindet, so ist $S = 0$.

---

*) Diese Auflösung wurde zuerst von Leibniz angegeben, später von Cramer neu erfunden. Vergl. §. 1 und §. 2.

Weil nun $a_{i0} R_0 + a_{i1} R_1 + \ldots + a_{in} R_n$ nicht nur für $i = 1, 2, \ldots, n$ (§. 3, 3), sondern auch für $i = 0$ verschwindet, so hat man

$$x_0 : x_1 : x_2 : \ldots : x_n = R_0 : R_1 : R_2 \ldots : R_n$$

zur Bestimmung von $x_k : x_0$ unter der Voraussetzung, dass die Grösse R_0, welche mit der oben (1) durch R bezeichneten Determinante übereinstimmt, nicht verschwindet.

Anmerkung. Bezeichnet man den Coefficienten des Elements a_{ik} in R_0 durch α_{ik}, so ist

$$-R_k = \alpha_{1k} a_{10} + \ldots + \alpha_{nk} a_{n0} \,.$$

Wenn aber R_0 verschwindet, so sind die Verhältnisse $\alpha_{1k} : \alpha_{2k} : \alpha_{3k} : \ldots$ von k unabhängig (§. 6, 5), folglich

$$\frac{R_k}{\alpha_{hk}} = \frac{R_1}{\alpha_{h1}} = \ldots$$

$$R_1 : R_2 : R_3 : \ldots = \alpha_{h1} : \alpha_{h2} : \alpha_{h3} : \ldots$$

3. Auflösung des Systems (4) $u_1 = 0, \ldots, u_n = 0$.

I. Wenn die Determinante $R = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ nicht verschwindet, so wird dem System nur durch die Werthe $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ genügt. Multiplicirt man die $k$te Colonne von R mit x_k, und addirt man zur $k$ten Colonne die mit x_1, $x_2, \ldots$ multiplicirten übrigen Colonnen, so findet man für Rx_k eine Determinante, deren $k$te Colonne verschwindende Elemente hat. Daher ist $Rx_k = 0$, folglich $x_k = 0$, weil R nicht verschwindet.

II. Wenn eine partiale Determinante $(n-1)$ten Grades nicht verschwindet und die Determinante R verschwindet, so wird dem System der Gleichungen durch die Proportion

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = \alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \ldots : \alpha_{in} \; {}^{*})$$

genügt, in welcher α_{ik} den Coefficienten des Elements a_{ik} in R und i eine beliebige Numer bedeutet. Denn die Summe

$$a_{k1} \alpha_{i1} + \ldots + a_{kn} \alpha_{in}$$

verschwindet für irgend welche Numern i und k aus der Reihe

*) Jacobi Det. 7. Die Gleichung $R = 0$ heisst nach Bezout Hist. de l'Acad. de Paris 1764 p. 288 die Resultante der linearen Gleichungen $u_1 = 0, \ldots, u_n = 0$.

$(1, 2, \ldots, n)$ §. 3, 3). Das System der Gleichungen $u_1 = 0, \ldots, u_n = 0$ ist einfach unbestimmt. Die Werthe von $x_1, x_2, \ldots$, welche $n-1$ beliebigen Gleichungen des Systems genügen, genügen auch der letzten Gleichung des Systems.

III. Wenn eine partiale Determinante $m$ten Grades nicht verschwindet z. B. $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm}$, und die partialen Determinanten der höhern Grade verschwinden *), so ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1m} & a_{1,m+1}\, x_{m+1} + \cdot\cdot + a_{1n}\, x_n \\ \cdot & & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & a_{mm} & a_{m,m+1}\, x_{m+1} + \cdot\cdot + a_{mn}\, x_n \\ a_{i1} & \cdot & \cdot & a_{im} & a_{i,m+1}\, x_{m+1} + \cdot\cdot + a_{in}\, x_n \end{vmatrix} = 0$$

als Summe von $n-m$ partialen Determinanten $(m+1)$ten Grades, welche nach der Voraussetzung einzeln verschwinden. Bezeichnet man die Coefficienten, welche die Elemente der letzten Zeile in der verschwindenden Determinante haben, der Reihe nach durch $p_1, p_2, \ldots, p_m, p$, so hat man (II)

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_m : 1 = p_1 : p_2 : \ldots : p_m : p .$$

Die Grössen $p_1, p_2, \ldots$ sind von i unabhängige homogene lineare Functionen von $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Also genügen die den Gleichungen $u_1 = 0, \ldots, u_m = 0$ genügenden Werthe von $x_1, \ldots, x_m$ auch jeder andern Gleichung des gegebenen Systems, und das gegebene System ist $(n-m)$ fach unbestimmt.

4. Bei besondrer Beschaffenheit der Coefficienten giebt es besondre Methoden zur Auflösung von Systemen linearer Gleichungen.

Wenn die Coefficienten des in (1) betrachteten Systems von der Art sind, dass

$$a_{ki} = -a_{ik}, \qquad a_{ii} = 0 ,$$

und wenn n gerade ist, so hat man nach den Sätzen und Bezeichnungen von §. 7 die Auflösung **)

$$(-1)^k (1, 2, \ldots, n)\, x_k = u_1 (2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n) + u_2 (3, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n, 1)$$
$$+ \ldots + u_n (1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1) .$$

*) Die Behandlung dieses Falls und die Ermittelung seiner Bedingungen (§. 4, 7) verdankt man Kronecker.

**) Jacobi Crelle J. 2 p. 356.

Multiplicirt man nämlich die gegebenen Gleichungen der Reihe nach mit

$$(2, .., k-1, k+1, .., n), \ (3, .., k-1, k+1, .., n, 1), .., (1, .., k-1, k+1, .., n-1)$$

und addirt die erhaltenen Gleichungen, so bekommt x_k den Coefficienten

$$a_{1k}(2, .., n) + a_{2k}(3, .., n, 1) + .. + a_{nk}(1, .., n-1),$$

dessen Werth durch

$$-(k, 1, .., k-1, k+1, .., n)$$

dargestellt werden kann (§. 7, 4). Indem man noch k mit $1, 2, .., k-1$ vertauscht, erhält man für den gesuchten Coefficienten (§. 7, 3)

$$(-1)^k (1, 2, .., n).$$

Dagegen hat x_i in der erhaltenen Summe den Coefficienten

$$-(i, 1, .., k-1, k+1, .., n),$$

welcher identisch verschwindet.

5. Wenn die Coefficienten des linearen Systems von der Art sind, dass

$$a_{ik} = -a_{ki}, \qquad a_{ii} = 0$$

und n ungerade ist, so ist $R = 0$ (§. 3, 13), und den gegebenen Gleichungen wird im Allgemeinen nur durch unendliche Werthe von $x_1, x_2, ..$ genügt, welche zu einander bestimmte Verhältnisse haben (2, Anm.).

Wenn jedoch die partialen Determinanten $(n-1)$ten Grades $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, ..$, deren Verhältnisse zu einander von k unabhängig sind (§. 6, 5), und die Werthe $u_1, u_2, ..$ der Bedingung

$$u_1 \alpha_{1k} + u_2 \alpha_{2k} + .. + u_n \alpha_{nk} = 0$$

genügen, so ist wenigstens eine Gleichung des Systems überflüssig und das System der übrigen Gleichungen nach (1) auflösbar.

Vermöge der Identität (§. 7, 4)

$$\alpha_{ik} = (i+1, .., n, 1, .., i-1)(k+1, .., n, 1, .., k-1)$$

reducirt sich jene Bedingung auf

$$u_1(2, .., n) + u_2(3, .., n, 1) + .. + u_n(1, .., n-1) = 0\,^{*)}.$$

*) Jacobi l. c.

Beispiel. Unter den Gleichungen

$$\begin{array}{rrrl} * & cy & -bz & = f \\ -cx & * & +az & = g \\ bx & -ay & * & = h \end{array}$$

folgt eine aus den beiden andern, wenn

$$af + bg + ch = 0\,,$$

ausserdem wird denselben durch unendliche Werthe von x, y, z genügt, die sich zu einander wie $a:b:c$ verhalten, vorausgesetzt dass keine der Grössen a, b, c verschwindet.

Andre lineare Systeme von besonderer Art werden unten (§. 10) aufgelöst.

§. 9. Lehrsätze über die linearen Differentialgleichungen.

1. Die Coefficienten einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung, welche kein von der Function unabhängiges Glied enthält, lassen sich, wie Libri *) bemerkt hat, aus n particulären Integralen derselben in ähnlicher Weise zusammensetzen, wie die Coefficienten einer algebraischen Gleichung aus den Wurzeln derselben. Wenn nämlich $y_1, y_2, \ldots, y_n$ particuläre Integrale der linearen Differentialgleichung

$$0 = a_0\, y + a_1\, y' + \ldots + a_n\, y^{(n)}$$

bedeuten, worin $y^{(i)}$ der $i$te Differentialquotient der Function y und die Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ von $y, y', \ldots$ unabhängig sind, so bilde man die 1ten, 2ten, .., $n$ten Differentialquotienten von $y_1, y_2, \ldots$ und die Determinante

$$R_n = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \cdot\ \cdot & y_{1,n-1} \\ y_2 & y_{21} & \cdot\ \cdot & y_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ y_n & y_{n1} & \cdot\ \cdot & y_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

worin y_{ik} den $k$ten Differentialquotienten von y_i bedeutet. Wird

*) Crelle J. 10 p. 189. Die Coefficienten sind von Libri durch ein weniger einfaches Verfahren dargestellt worden. Den directen Weg zu ihrer Bestimmung hat Libri zwar angedeutet, aber nicht eingeschlagen.

nun der Coefficient von y_{ik} in R_n durch $\eta_{ik} = \frac{\partial R_n}{\partial y_{ik}}$ (§. 3, 12) bezeichnet, so erhält man

$$-R_n \frac{a_i}{a_n} = y_{1n}\,\eta_{1i} + y_{2n}\,\eta_{2i} + \cdot\cdot + y_{nn}\,\eta_{ni}\ ^{*}).$$

Beweis. Nach den Voraussetzungen hat man zur Bestimmung der Coefficienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ das System von linearen Gleichungen

$$a_0\,y_1 + a_1\,y_{11} + \cdot\cdot + a_{n-1}\,y_{1,n-1} = -\,a_n\,y_{1n}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_0\,y_n + a_1\,y_{n1} + \cdot\cdot + a_{n-1}\,y_{n,n-1} = -\,a_n\,y_{nn}\,,$$

durch dessen Auflösung (§. 8, 1) der für a_i gegebene Werth gefunden wird. Die Bestimmung der Coefficienten wird unvollkommen, wenn die gegebenen particulären Integrale so von einander abhängen, dass $R_n = 0$.

2. Die Determinante R_n lässt sich durch die Coefficienten von $y^{(n-1)}$ und $y^{(n)}$ ausdrücken. Unter den angegebenen Voraussetzungen ist

$$-R_n \frac{a_{n-1}}{a_n} = y_{1n}\,\eta_{1,n-1} + \cdot\cdot + y_{nn}\,\eta_{n,n-1}\,.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hat den Werth $\frac{dR_n}{dx}$ (§. 3, 15), folglich ist

$$\frac{d \log R_n}{dx} = -\,\frac{a_{n-1}}{a_n}\,, \quad \log R_n = -\int \frac{a_{n-1}}{a_n}\,dx\,,$$

$$R_n = e^{-\int \frac{a_{n-1}}{a_n}\,dx}\ ^{**}).$$

3. Die Integration der linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung

$$\text{(I)} \qquad a = a_0\,y + a_1\,y' + \cdot\cdot + a_n\,y^{(n)}\,,$$

worin $a, a_0, a_1, \dots$ von $y, y', \dots$ unabhängig sind, lässt sich auf die Integration einer linearen Differentialgleichung $(n-m)$ter

---

*) Brioschi Det. p. 81.

**) Abel (Crelle J. 2 p. 22) hat diese Relation für $n = 2$ aufgestellt. Die allgemeine Formel wird Liouville zugeschrieben. Tissot Liouv. J. 17 p. 178.

Ordnung reduciren, wenn m particuläre Integrale der einfacheren linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung

$$\text{(II)} \qquad 0 = a_0\, y + a_1\, y' + \,.\,.\, + a_n\, y^{(n)}$$

gegeben sind. Lagrange (Miscell. Taur. 3 p. 179) hat diesen Satz 1764 ausgesprochen und die Möglichkeit der Reduction nachgewiesen. Die Reduction ist von D'Alembert (l. c. p. 381) in kurzen Umrissen ausgeführt worden, mit dessen Verfahren Libri's Abhandlung über diesen Gegenstand (Crelle J. 10 p. 185) im Wesentlichen zusammentrifft. Nachdem mit Hülfe der Determinanten von Malmstèn (Crelle J. 39 p. 91) die Ableitung des allgemeinen Integrals der Gleichung (II) aus $n-1$ particulären Integralen derselben gezeigt worden war, hat Joachimsthal (Crelle J. 40 p. 48) auch die Reduction der allgemeinern linearen Differentialgleichung (I) durch m gegebene particuläre Integrale der Gleichung (II) auf analoge Weise ausgeführt. Das hierzu dienliche Verfahren ist zum grossen Theil bereits von Lagrange vorgezeichnet, der in einer spätern Abhandlung (Mém. de Berlin 1775 p. 190) das allgemeine Integral der Gleichung (I) durch n particuläre Integrale der Gleichung (II) dargestellt hat.

Wenn die von x abhängigen Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ gegebene particuläre Integrale der Gleichung (II) bedeuten, so lassen sich ebensoviel Functionen von x, welche durch b_1, $b_2, \ldots, b_m$ bezeichnet werden, durch Auflösung einer allgemeinen linearen Differentialgleichung $(n-m)$ter Ordnung und durch m Quadraturen dergestalt bestimmen, dass

$$y = b_1\, y_1 + b_2\, y_2 + \,.\,.\, + b_m\, y_m$$

das allgemeine Integral der Gleichung (I) wird. Bezeichnet man nämlich

$$\frac{d^k y_i}{d x^k} \text{ durch } y_{ik}, \quad \frac{d b_i}{d x} \text{ durch } b_{i1},$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
y' \quad &= b_1\, y_{11} \quad + \,.\,.\, + b_m\, y_{m1} \\
y'' \quad &= b_1\, y_{12} \quad + \,.\,.\, + b_m\, y_{m2} \\
. \quad & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
y^{(m-1)} &= b_1\, y_{1,m-1} + \,.\,.\, + b_m\, y_{m,m-1}
\end{aligned}$$

unter den Bedingungen

$$\begin{aligned} b_{11}\, y_1 \quad &+ \ldots + b_{m1}\, y_m &= 0 \\ b_{11}\, y_{11} \quad &+ \ldots + b_{m1}\, y_{m1} &= 0 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ b_{11}\, y_{1,m-2} &+ \ldots + b_{m1}\, y_{m,m-2} &= 0 \end{aligned}$$

durch welche die Verhältnisse $b_{11} : b_{21} : b_{31} : \ldots$ bestimmt werden (§. 8, 3). Ferner erhält man

$$y^{(m)} = b_1\, y_{1m} + \ldots + b_m\, y_{mm} + z\,,$$

wo

$$b_{11}\, y_{1,m-1} + \ldots + b_{m1}\, y_{m,m-1} = z\,,$$

eine bestimmte Function von x. Ebenso ist

$$y^{(m+1)} = b_1\, y_{1,m+1} + \ldots + b_m\, y_{m,m+1} + z' + z_1$$

wenn

$$b_{11}\, y_{1m} + \ldots + b_{m1}\, y_{mm} = z_1\,, \quad \frac{dz}{dx} = z'\,,$$

$$y^{(m+2)} = b_1\, y_{1,m+2} + \ldots + b_m\, y_{m,m+2} + z'' + z_{11} + z_2$$

wenn

$$b_{11}\, y_{1,m+1} + \ldots + b_{m1}\, y_{m,m+1} = z_2\,, \quad \frac{dz_1}{dx} = z_{11}\,,$$

$$\begin{aligned} y^{(n)} = b_1\, y_{1n} + \ldots + b_m\, y_{mn} &+ z^{(n-m)} \\ &+ z_{1,n-m-1} + \ldots + z_{n-m-1,1} + z_{n-m} \end{aligned}$$

wenn

$$b_{11}\, y_{1,n-1} + \ldots + b_{m1}\, y_{m,n-1} = z_{n-m}\,.$$

Indem man diese Gleichungen der Reihe nach mit $a_0, a_1 \ldots$ multiplicirt und dann addirt, so findet man vermöge der über $y_1, y_2, \ldots, y_m$ gemachten Voraussetzungen

$$\begin{aligned} a = a_m\, z + a_{m+1}\, z' + a_{m+2}\, z'' &+ \ldots + a_n\, z^{(n-m)} \\ + a_{m+1}\, z_1 + a_{m+2}\, z_{11} &+ \ldots + a_n\, z_{1,n-m-1} \\ + a_{m+2}\, z_2 &+ \ldots + a_n\, z_{2,n-m-2} \\ &\ldots \\ &+ a_n\, z_{n-m} \end{aligned}$$

als Bedingung, unter welcher $b_1\, y_1 + b_2\, y_2 + \ldots + b_m\, y_m$ ein Integral der Gleichung (I) ist.

Durch Auflösung des Systems von Gleichungen

$$\begin{aligned} b_{11}\, y_1 \quad &+ \ldots + b_{m1}\, y_m &= 0 \\ b_{11}\, y_{11} \quad &+ \ldots + b_{m1}\, y_{m1} &= 0 \\ &\ldots \\ b_{11}\, y_{1,m-2} &+ \ldots + b_{m1}\, y_{m,m-2} &= 0 \\ b_{11}\, y_{1,m-1} &+ \ldots + b_{m1}\, y_{m,m-1} &= z \end{aligned}$$

findet man aber (§. 8, 4)

$$b_{i1}\, R_m = \eta_{i,m-1}\, z\,, \quad b_i = \int \frac{\eta_{i,m-1}}{R_m}\, z\, dx\,,$$

wenn

$$R_m = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdot\,\cdot & y_m \\ y_{11} & y_{21} & \cdot\,\cdot & y_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \\ y_{1,m-1} & y_{2,m-1} & \cdot\,\cdot & y_{m,m-1} \end{vmatrix}$$

und

$$\eta_{i,m-1} = \frac{\partial R_m}{\partial y_{i,m-1}}$$

der Coefficient von $y_{i,m-1}$ in R_m ist. Die Functionen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sind also durch Quadraturen bestimmt, nachdem z gefunden ist.

Um nun die Gleichung, wodurch z bestimmt ist, frei von $b_1, b_2, \ldots$ darzustellen, bemerke man

$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11}\, y_{1m} + \cdot\,\cdot + b_{m1}\, y_{mm} \\ &= (\eta_{1,m-1}\, y_{1m} + \cdot\,\cdot + \eta_{m,m-1}\, y_{mm})\, \frac{z}{R_m} = c_1\, z \\ z_2 &= b_{11}\, y_{1,m+1} + \cdot\,\cdot + b_{m1}\, y_{m,m+1} \\ &= (\eta_{1,m-1}\, y_{1,m+1} + \cdot\,\cdot + \eta_{m,m-1}\, y_{m,m+1})\, \frac{z}{R_m} = c_2\, z \\ z_{n-m} &= b_{11}\, y_{1,n-1} + \cdot\,\cdot + b_{m1}\, y_{m,n-1} \\ &= (\eta_{1,m-1}\, y_{1,n-1} + \cdot\,\cdot + \eta_{m,m-1}\, y_{m,n-1})\, \frac{z}{R_m} = c_{n-m}\, z\,, \end{aligned}$$

wodurch $c_1, c_2, \ldots, c_{n-m}$ gegebene Functionen von x sind. Daher findet man durch Differentiation bei analoger Bezeichnung

$$\begin{aligned} z_{i1} &= c_{i1}\, z + c_i\, z' \\ z_{i2} &= c_{i2}\, z + 2\, c_{i1}\, z' + c_i\, z'' \\ z_{i3} &= c_{i3}\, z + 3\, c_{i2}\, z' + 3\, c_{i1}\, z'' + c_i\, z''' \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

folglich ist

$$\begin{aligned} a = \; & a_m\, z \\ & + a_{m+1}\, (c_1\, z + z') \\ & + a_{m+2} \left| \begin{array}{l} c_{11}\, z + c_1\, z' + z'' \\ + c_2\, z \end{array} \right. \\ & + a_{m+3} \left| \begin{array}{l} c_{12}\, z + 2\, c_{11}\, z' + c_1\, z'' + z''' \\ + c_{21}\, z + c_2\, z' \\ + c_3\, z \end{array} \right. \\ & + a_{m+4} \left| \begin{array}{l} c_{13}\, z + 3\, c_{12}\, z' + 3\, c_{11}\, z'' + c_1\, z^{(3)} + z^{(4)} \\ + c_{22}\, z + 2\, c_{21}\, z' + c_2\, z'' \\ + c_{31}\, z + c_3\, z' \\ + c_4\, z \end{array} \right. \\ & + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

die lineare Gleichung $(m-n)$ter Ordnung, welcher die Function z zu genügen hat. Aus dem Werth von z lassen sich dann die Functionen $b_1, b_2, .., b_m$ berechnen, so dass

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + . . + b_m y_m$$

ein Integral der Gleichung (I) wird. Da in den particulären Integralen $y_1, y_2, .., y_m$ nach üblicher Voraussetzung unbestimmte Constanten nicht vorkommen, da ferner das allgemeine Integral z der zuletzt gefundenen linearen Gleichung $n-m$ unbestimmte Constanten enthält, und durch m Quadraturen bei der Berechnung von $b_1, b_2, .., b_m$ andere m unbestimmte Constanten entstehen, so hat das gefundene Integral der Gleichung (I) die erforderliche Anzahl von n unbestimmten Constanten, wodurch es als das allgemeine Integral der Gleichung (I) erscheint.

4. Die lineare Differentialgleichung, welche zur Integration der gegebenen Differentialgleichung zu lösen übrig bleibt, ist im Allgemeinen nicht lösbar, wenn sie die erste Ordnung übersteigt. Also kommen besonders die Fälle $m = n$ und $m = n - 1$ in Betracht.

Für $m = n$ wird

$$a = a_n z, \qquad b_{i1} R_n = \frac{a}{a_n} \eta_{i,n-1},$$

$$b_i = \int \frac{a}{a_n} \frac{\eta_{i,n-1}}{R_n} dx,$$

folglich ist das allgemeine Integral der Gleichung (I)

$$y = y_1 \int \frac{a}{a_n R_n} \eta_{1,n-1} dx + y_2 \int \frac{a}{a_n R_n} \eta_{2,n-1} dx + . . + y_n \int \frac{a}{a_n R_n} \eta_{n,n-1} dx,$$

wie Lagrange und Joachimsthal a. a. O. bemerkt haben.

Für $m = n - 1$ wird $a = a_{n-1} z + a_n (c_1 z + z')$. Nun ist (§. 3, 15)

$$R_{n-1} c_1 = \eta_{1,n-2} y_{1,n-1} + . . + \eta_{n-1,n-2} y_{n-1,n-1} = \frac{dR_{n-1}}{dx},$$

folglich

$$a R_{n-1} = a_{n-1} R_{n-1} z + a_n \frac{d(R_{n-1} z)}{dx}.$$

Zur Auflösung dieser Gleichung bedarf man eines particulären Integrals u_1 der Gleichung $0 = a_{n-1} u + a_n u'$, nämlich

$$u_1 = e^{-\int \frac{a_{n-1}}{a_n} dx}.$$

Setzt man nun das zunächst gesuchte allgemeine Integral

$$R_{n-1} z = u_1 v_1,$$

folglich nach der angenommenen Bezeichnung

$$(R_{n-1} z)' = u_{11} v_1 + u_1 v_{11},$$

so erhält man, weil nach Voraussetzung $a_{n-1} u_1 + a_n u_{11} = 0$ ist,

$$a R_{n-1} = a_n u_1 v_{11}, \qquad v_1 = \int \frac{a R_{n-1}}{a_n u_1} dx,$$

$$R_{n-1} z = u_1 \int \frac{a R_{n-1}}{a_n u_1} dx$$

mit einer unbestimmten Constante. Zur Bestimmung von b_i hat man endlich

$$b_{i1} R_{n-1} = \frac{u_1 v_1}{R_{n-1}} \eta_{i,n-2}$$

$$b_i = \int \frac{u_1 v_1}{R_{n-1}^2} \eta_{i,n-2} dx$$

mit je einer neuen unbestimmten Constante, so dass

$$y = b_1 y_1 + \cdot \cdot + b_{n-1} y_{n-1}$$

das allgemeine Integral der Gleichung (I) ist, wie Joachimsthal (l. c.) bemerkt hat. Den besondern Fall $a = 0$, in welchem v_1 selbst zur unbestimmten Constante wird, hatte Malmstén (l. c.) früher analog behandelt.

§. 10. Product aller Differenzen von gegebenen Grössen.

1. Wenn man in der Reihe der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jede von allen folgenden subtrahirt, so erhält man $\frac{1}{2} n (n-1)$ Differenzen, deren Product

$$\begin{array}{llll} (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) & \cdot \cdot & (\alpha_n - \alpha_1) \\ \quad (\alpha_3 - \alpha_2) & \cdot \cdot & (\alpha_n - \alpha_2) \\ & \cdot \cdot & \cdot \cdot \\ & & (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \end{array}$$

durch $\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ bezeichnet wird. Dieses Product reducirt

sich auf eine Determinante $n$ten Grades, deren Zeilen geometrische Progressionen enthalten, nämlich *)

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Beweis. Das Product Δ ist alternirend (§. 1, 4). Wenn nun $\alpha_1^a \alpha_2^b \alpha_3^c \ldots$ ein Glied von Δ ist, so ist $\alpha_2^a \alpha_1^b \alpha_3^c \ldots$ ein Glied von $-\Delta$, folglich $-\alpha_2^a \alpha_1^b \alpha_3^c \ldots$ ein Glied von Δ. Diese beiden Glieder von Δ sind entgegengesetzt gleich, wenn die Exponenten a und b einander gleich sind. Also braucht man, um alle Glieder des Products zu bilden, für die Exponenten $a, b, c, \ldots$ nur verschiedene Zahlen zu setzen, und zwar Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, n-1$, weil kein Exponent den Werth n erreichen kann. Die Glieder, welche aus

$$\alpha_1^0 \alpha_2^1 \alpha_3^2 \ldots \alpha_n^{n-1}$$

durch gegenseitige Vertauschung der Exponenten entspringen, lassen sich auch durch gegenseitige Vertauschung der Dignanden ableiten, und sind daher Glieder von Δ oder von $-\Delta$, d. h. positive oder negative Glieder von Δ, je nachdem sie durch Permutationen der einen oder der andern Classe entstanden. Also ist das Product Δ von der Determinante

$$\Sigma \pm \alpha_1^0 \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^{n-1}$$

nicht verschieden (§. 2, 2).

Von allen $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ Gliedern des Products bleiben nur $1 . 2 \ldots n$ übrig, also

bei	3 Grössen	6	statt	8	
»	4 »	24	»	64	
»	5 »	120	»	1024	u. s. w.

*) Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 48. Analyse algébr. III 2 und Note IV. Jacobi Crelle J. 22 p. 360. Das Product der Differenzen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung war von Waring, Lagrange, Vandermonde betrachtet worden. Bei dem Letztern findet man den besondern Fall des obigen Satzes

$$(b-a)(c-a)(c-b) = ab^2 - a^2b + bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a$$

Hist. de l'Acad. de Paris 1771 p. 369.

Beispiel.

$$(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1\beta_1 & \beta_1^2 \\ \alpha_2^2 & \alpha_2\beta_2 & \beta_2^2 \\ \alpha_3^2 & \alpha_3\beta_3 & \beta_3^2 \end{vmatrix}.$$

2. Jede ganze alternirende Function der Variablen α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ist durch das Product der Differenzen $\varDelta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ theilbar*). Denn durch die gegenseitige Vertauschung von irgend zwei Variablen erhält die Function den entgegengesetzt gleichen Werth; daher verschwindet sie, wenn die beiden Variablen von einander sich nicht unterscheiden (§. 2, 4); also ist sie durch die Differenz derselben, mithin durch das Product $\varDelta$ theilbar.

Der Quotient der ganzen alternirenden Function durch das Product der Differenzen ihrer Variablen ist je nach der Anzahl der Dimensionen entweder eine von den Variablen unabhängige Zahl, oder eine (permanent) symmetrische Function der Variablen.

Z. B. die Determinante (1) $\Sigma \pm \alpha_1^0 \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^{n-1}$ ist eine ganze alternirende Function von ebensoviel Dimensionen als das Product $\varDelta$. Der Quotient der Determinante durch das Product ist 1, weil das Anfangsglied der Determinante mit dem Anfangsglied des Products auch dem Zeichen nach übereinstimmt.

Andre Beispiele solcher Quotienten kommen im Folgenden vor. Die allgemeine Berechnung derselben ist von Jacobi Crelle J. 22 p. 365 gezeigt worden.

3. Wenn $\varphi_i(x) = a_{0i} + a_{1i}x + \ldots + a_{n-1,i}x^{n-1}$ ist, so hat man

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(\alpha_1) & \varphi_0(\alpha_2) & \ldots & \varphi_0(\alpha_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \varphi_{n-1}(\alpha_1) & \varphi_{n-1}(\alpha_2) & \ldots & \varphi_{n-1}(\alpha_n) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{00} & \ldots & a_{n-1,0} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{0,n-1} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

nach der Multiplicationsregel (§. 5, 4).

---

*) Cauchy l. c. p. 46.

Ist $\varphi_i(x)$ nur vom $i$ten Grade, d. h. $a_{ik} = 0$, wenn $k > i$, so reducirt sich die Determinante der Coefficienten auf ihr Anfangsglied, und man erhält*)

$$\Sigma \pm \varphi_0(\alpha_1) \,.\,.\, \varphi_{n-1}(\alpha_n) = a_{00}\, a_{11} \,.\,.\, a_{n-1,n-1}\, \Delta(\alpha_1, \,.\,.\,, \alpha_n) \,.$$

Dem obigen Lehrsatz steht ein allgemeinerer zur Seite. Wenn

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \varphi_0(x) + \varphi_1(x)y + \,.\,.\, + \varphi_{n-1}(x)y^{n-1} \\ &= \Sigma\, a_{ik}\, x^i y^k \end{aligned}$$

eine Summe, deren Glieder gebildet werden, indem man für i und k alle Zahlen von 0 bis $n-1$ setzt, so erhält man bei nochmaliger Anwendung der Multiplicationsregel**)

$$\Sigma \pm F(\alpha_1, \beta_1) \,.\,.\, F(\alpha_n, \beta_n) = \Sigma \pm a_{00} \,.\,.\, a_{n-1,n-1}\, \Delta(\alpha_1, \,.\,.\,, \alpha_n)\, \Delta(\beta_1, \,.\,.\,, \beta_n)$$

4. Wenn man das Product aller Differenzen der Grössen $\alpha_1, \,.\,.\,, \alpha_n$ mit dem Product aller Differenzen der Grössen $\beta_1, \,.\,.\,, \beta_n$ multiplicirt, so erhält man eine Determinante $n$ten Grades. Nach der Multiplicationsregel (§. 5, 4) ist

$$\Delta(\alpha_1, \,.\,.\,, \alpha_n)\, \Delta(\beta_1, \,.\,.\,, \beta_n)$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & .\,. & \alpha_1^{n-1} \\ . & . & .\,. & . \\ 1 & \alpha_n & .\,. & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & .\,. & \beta_1^{n-1} \\ . & . & .\,. & . \\ 1 & \beta_n & .\,. & \beta_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & .\,. & c_{1n} \\ . & .\,. & . \\ c_{n1} & .\,. & c_{nn} \end{vmatrix}$$

wenn

$$c_{ik} = 1 + \alpha_i\beta_k + \alpha_i^2\beta_k^2 + \,.\,.\, + \alpha_i^{n-1}\beta_k^{n-1} = \frac{1 - \alpha_i^n \beta_k^n}{1 - \alpha_i\beta_k} \text{***)},$$

oder wenn

$$c_{ik} = \alpha_1^{i-1}\beta_1^{k-1} + \alpha_2^{i-1}\beta_2^{k-1} + \,.\,.\, + \alpha_n^{i-1}\beta_n^{k-1} \,.$$

Insbesondere ist

$$\Delta(\alpha_1, \,.\,.\,, \alpha_n)^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & .\,. & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & .\,. & s_n \\ . & . & .\,. & . \\ s_{n-1} & s_n & .\,. & s_{2n-2} \end{vmatrix} = S_n$$

wenn

$$s_i = \alpha_1^i + \alpha_2^i + \,.\,.\, + \alpha_n^i \,.$$

---

*) Borchardt über eine Interpolationsformel. Abh. der Berl. Acad. 1860 p. 4

**) Borchardt Berl. Monatsbericht 1859 p. 378 und Crelle J. 57 p. 112.

***) Cauchy Exerc. d'anal. 2 p. 169.

Denn in diesem Falle reducirt sich das Element c_{ik} der zu bildenden Determinante auf die Summe der $(i+k-2)$ten Potenzen der Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Allgemeiner hat man *)

$$\Sigma[\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^2] = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdot & \cdot & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \cdot & \cdot & s_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{m-1} & s_m & \cdot & \cdot & s_{2m-2} \end{vmatrix} = S_m$$

wenn die Summe die sämmtlichen $\binom{n}{m}$ Glieder umfasst, welche aus dem Anfangsglied $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^2$ dadurch entspringen, dass an die Stelle der Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m$ je m verschiedene aus der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gesetzt werden. Denn unter Voraussetzung

$$c_{ik} = s_{i+k-2} = \alpha_1^{i-1}\alpha_1^{k-1} + \alpha_2^{i-1}\alpha_2^{k-1} + \ldots + \alpha_n^{i-1}\alpha_n^{k-1}$$

ist die durch S_m bezeichnete Determinante in eine Summe von Quadraten zerlegbar (§. 5, 2), nämlich

$$S_m = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot & \cdot & c_{mm} \end{vmatrix} = \Sigma \left\{ \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdot & \cdot & \alpha_1^{m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_m & \cdot & \cdot & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}^2 \right\},$$

wobei das Summenzeichen die angegebene Bedeutung hat.

5. Ebenso wird die noch umfassendere Summe

$$\Sigma\{\chi(\alpha_1)\chi(\alpha_2) \ldots \chi(\alpha_m)\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^2\}$$

durch die Determinante $m$ten Grades

$$T = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \cdot & \cdot & t_{m-1} \\ t_1 & t_2 & \cdot & \cdot & t_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{m-1} & t_m & \cdot & \cdot & t_{2m-2} \end{vmatrix}$$

ausgedrückt **), wenn $\chi(\alpha_i)$ gegeben ist, und

$$t_\mu = \alpha_1^\mu \chi(\alpha_1) + \ldots + \alpha_n^\mu \chi(\alpha_n).$$

Setzt man insbesondere

$$(1) \qquad \chi(\alpha_i) = b_i(x - \alpha_i)$$
$$u_\mu = b_1 \alpha_1^\mu + \ldots + b_n \alpha_n^\mu$$

---

*) Cayley Liouv. J. 11 p. 298 und Borchardt Liouv. J. 12 p. 58.

**) Joachimsthal Crelle J. 48 p. 394 und Borchardt über eine Interpolationsformel p. 8.

so wird $t_\mu = u_\mu x - u_{\mu+1}$, und die Determinante T lässt sich in eine Determinante $(m+1)$ten Grades transformiren, wie folgt*).

Nachdem man jede Colonne mit -1 multiplicirt hat, findet man (§. 2, 7)

$$T = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & . & . & 1 \\ u_1 - u_0 x & u_2 - u_1 x & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ u_m - u_{m-1} x & u_{m+1} - u_m x & . & . & 0 \end{vmatrix}$$

Addirt man zur zweiten Zeile die mit x multiplicirte erste Zeile, so behält man in der zweiten Zeile

$$u_1 \quad u_2 \quad . \quad . \quad u_m \quad x \;.$$

Wenn man diese mit x multiplicirt und zur dritten Zeile addirt, so behält man in der dritten Zeile

$$u_2 \quad u_3 \quad . \quad . \quad u_{m+1} \quad x^2 \;,$$

u. s. f. Daher ist unter der Voraussetzung (I)

$$T = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & . & . & u_{m-1} & 1 \\ u_1 & u_2 & . & . & u_m & x \\ . & . & . & . & . & . \\ u_m & u_{m+1} & . & . & u_{2m-1} & x^m \end{vmatrix} .$$

Setzt man ferner

$$\text{II)} \qquad \chi(a_i) = b_i (x - a_i)(y - a_i)$$

so wird

$$t_\mu = u_{\mu+2} - u_{\mu+1} x - (u_{\mu+1} - u_\mu x) y$$

und die Determinante T kann in eine Determinante $(m+2)$ten Grades transformirt werden. Man hat nämlich wie vorhin

$$T = \begin{vmatrix} 1 & u_1 - u_0 x & u_2 - u_1 x & . & . \\ 0 & u_2 - u_1 x - (u_1 - u_0 x) y & u_3 - u_2 x - (u_2 - u_1 x) y & . & . \\ 0 & u_3 - u_2 x - (u_2 - u_1 x) y & u_4 - u_3 x - (u_3 - u_2 x) y & . & . \\ . & . \; . \; . & . \; . \; . & & \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & u_1 - u_0 x & . & . & u_m - u_{m-1} x \\ y & u_2 - u_1 x & . & . & u_{m+1} - u_m x \\ . & . & . & . & . \\ y^m & u_{m+1} - u_m x & . & . & u_{2m} - u_{2m-1} x \end{vmatrix}$$

---

*) Vergl. Jacobi Crelle J. 30 p. 129.

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . \\ 1 & u_0 & u_1 - u_0 x & . & . \\ y & u_1 & u_2 - u_1 x & . & . \\ . & . & . \; . & . & . \\ . & . & . \; . & & \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & & x^m \\ 1 & u_0 & u_1 & . & u_m \\ y & u_1 & u_2 & . \; . & u_{m+1} \\ . & . & . & . \; . & . \\ y^m & u_m & u_{m+1} & . \; . & u_{2m} \end{vmatrix}$$

6. Die Determinante $m$ten Grades (4)

$$S_m = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & . \; . & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & . \; . & s_m \\ . & . & . \; . & . \\ s_{m-1} & s_m & . \; . & s_{2m-2} \end{vmatrix} = \Sigma \left\{ \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^2 \right\}$$

kann unter der Voraussetzung

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \,.\,.\, + a_0$$
$$= a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \,.\,.\, (x - \alpha_n)$$

durch die Coefficienten von $f(x)$ ausgedrückt werden. Man bilde aus den $m-2$ Zeilen

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

und aus den m folgenden Zeilen

$$\begin{matrix} 0 & 0 & . \; . & 0 & s_0 & s_1 & . \; . & s_{m-1} \\ 0 & 0 & . \; . & s_0 & s_1 & . & . \; . & s_m \\ . & . & . \; . & . & . & . & . \; . & . \\ s_0 & s_1 & . \; . & . & . & . & . \; . & s_{2m-3} \\ s_1 & s_2 & . \; . & . & . & . & . \; . & s_{2m-2} \end{matrix}$$

ein System von $(2m-2)^2$ Elementen, dessen Determinante von S_m nicht verschieden ist (§. 2, 6). Die Colonnen dieses Systems werden transformirt, die erste, indem man sie mit a_n multiplicirt; die zweite, indem man sie mit a_n multiplicirt und zu ihr die mit a_{n-1} multiplicirte erste Colonne addirt; die dritte, indem man sie mit a_n multiplicirt und zu ihr die mit a_{n-1}, a_{n-2} multiplicirte 2te, 1te Colonne addirt; u. s. f. Dadurch entsteht das System der $m-2$ Zeilen

$$\begin{matrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & . & . & . \\ 0 & a_n & a_{n-1} & . & . & . \\ 0 & 0 & a_n & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

und der $m-1$ folgenden Zeilen, die mit $m-2$, $m-3$, .. Nullen anfangen,

$$\begin{array}{cccccc} 0 & \cdot\;\cdot & 0 & a_n s_0 & a_n s_1 + a_{n-1} s_0 & \cdot\;\cdot \\ 0 & \cdot\;\cdot & a_n s_0 & a_n s_1 + a_{n-1} s_0 & a_n s_2 + a_{n-1} s_1 + a_{n-2} s_0 & \cdot\;\cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \end{array}$$

und der Schlusszeile

$$a_n s_1 \quad a_n s_2 + a_{n-1} s_1 \quad a_n s_3 + a_{n-1} s_2 + a_{n-2} s_1 \quad \cdot\;\cdot\;\cdot$$

Die Determinante dieses Systems hat den Werth $a_n^{2m-2} S_m$ (§. 3, 4. 6), und die Elemente können mit Hülfe der Newton'schen Identitäten*)

$$\begin{aligned} a_n s_0 &= n a_n \\ a_n s_1 + a_{n-1} s_0 &= (n-1) a_{n-1} \\ a_n s_2 + a_{n-1} s_1 + a_{n-2} s_0 &= (n-2) a_{n-2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\quad \cdot\;\cdot\;\cdot & \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\quad \cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

reducirt werden. Für die Schlusszeile hat man, weil $s_0 = n$ ist,

$$\begin{aligned} a_n s_1 &= -\, a_{n-1} \\ a_n s_2 + a_{n-1} s_1 &= -\, 2a_{n-2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\quad \cdot\;\cdot\;\cdot & \quad \cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

Demnach findet man

$$-\, a_n^{2m-2} S_m = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdot\;\cdot \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdot\;\cdot \\ 0 & 0 & a_n & \cdot\;\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot \\ 0 & n a_n & (n-1) a_{n-1} & \cdot\;\cdot \\ n a_n & (n-1) a_{n-1} & (n-2) a_{n-2} & \cdot\;\cdot \\ a_{n-1} & 2a_{n-2} & 3a_{n-3} & \cdot\;\cdot \end{vmatrix}$$

eine Determinante $(2m-2)$ten Grades, bei welcher die $m-2$ ersten und die $m-1$ folgenden Zeilen in Bezug auf die nicht verschwindenden Elemente übereinstimmen. Insbesondere ist

$$-\, a_n^2 S_2 = \begin{vmatrix} n a_n & (n-1) a_{n-1} \\ a_{n-1} & 2 a_{n-2} \end{vmatrix}$$

---

*) Newton Arithm. univers. ed. 's Gravesande p. 192. Man leitet dieselben am einfachsten aus der Identität der beiden für $\frac{f'(x)}{f(x)}$ sich darbietenden Ausdrücke ab.

$$-a_n^4 S_3 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \\ 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} \\ na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & (n-3)a_{n-3} \\ a_{n-1} & 2a_{n-2} & 3a_{n-3} & 4a_{n-4} \end{vmatrix} \quad \text{u. s. w.}$$

7. Das Quadrat des Products von allen Differenzen der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (4)

$$S_n = \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^2$$

kann durch Werthe des Differentialquotienten der Function

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_n)$$

ausgedrückt werden. Man hat nämlich

$$\begin{aligned} f'(\alpha_1) &= \quad a_n \quad (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3) \ldots (\alpha_1-\alpha_n) \\ f'(\alpha_2) &= (\alpha_2-\alpha_1) \quad a_n \quad (\alpha_2-\alpha_3) \ldots (\alpha_2-\alpha_n) \\ f'(\alpha_3) &= (\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2) \quad a_n \quad \ldots (\alpha_3-\alpha_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

folglich *)

$$f'(\alpha_1) \ldots f'(\alpha_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^n \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2 .$$

Ebendaher findet man für $m < n$

$$f'(\alpha_1) \ldots f'(\alpha_m) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_n^m \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^2 P ,$$

wenn durch P das Product aller Differenzen der Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ von den Grössen (Subtrahenden) $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ bezeichnet wird.

Beispiel. Wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die $n$ten Wurzeln von 1 sind, so ist

$$f(x) = x^n - 1 , \quad f'(x) = nx^{n-1} , \quad \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = (-1)^{n-1} ,$$

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^n .$$

Und wenn $\alpha_n = 1$, so hat man

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})^2 = \frac{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2}{f'(\alpha_n)^2} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^{n-2} .$$

---

*) Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 485.

8. In der Determinante $n$ten Grades

$$P = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & . & . & \alpha_1^{n-2} & u_1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & \alpha_n & . & . & \alpha_n^{n-2} & u_n \end{vmatrix}$$

hat das Element u_i den Coefficienten

$$(-1)^{n-i} \varDelta(\alpha_1, .., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, .., \alpha_n),$$

wie sich ergiebt, indem man die $i$te Zeile zur Schlusszeile macht (§. 3. 1). Nach der angegebenen Bezeichnung ist

$$\varDelta(\alpha_1, .., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, .., \alpha_n) = \frac{\varDelta(\alpha_1, .., \alpha_n)}{(\alpha_i - \alpha_1)..(\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_{i+1} - \alpha_i)..(\alpha_n - \alpha_i)}$$

Bildet man nun

$$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)..(z - \alpha_n)$$

$$f'(\alpha_i) = (\alpha_i - \alpha_1)..(\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1})..(\alpha_i - \alpha_n)$$

so findet man

$$(-1)^{n-i} \varDelta(\alpha_1, .., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, .., \alpha_n) = \frac{\varDelta(\alpha_1, .., \alpha_n)}{f'(\alpha_i)}$$

und daher folgende Entwickelung der gegebenen Determinante

$$P = \left(\frac{u_1}{f'(\alpha_1)} + .. + \frac{u_n}{f'(\alpha_n)}\right) \varDelta(\alpha_1, .., \alpha_n).$$

9. Bezeichnet man durch P_r die Determinante, in welche P (8) übergeht, wenn α_i^r an die Stelle von u_i tritt, so hat man *)

$$\frac{\alpha_1^r}{f'(\alpha_1)} + .. + \frac{\alpha_n^r}{f'(\alpha_n)} = \frac{P_r}{\varDelta(\alpha_1, .., \alpha_n)}.$$

Die Determinante P_r verschwindet, wenn die letzte Colonne mit einer der übrigen Colonnen übereinstimmt. Also verschwindet die Summe der Quotienten für $r = 0, 1, .., n-2$.

Die Determinante P_r geht in das Product $\varDelta$ über, wenn $r = n - 1$. Also hat für $r = n - 1$ die Summe den Werth 1.

Die Determinante P_r ist eine ganze alternirende Function von $\alpha_1, .., \alpha_n$, mithin durch das Product $\varDelta$ theilbar (2). Also ist für $r > n - 1$ die betrachtete Summe eine symmetrische ganze Function Q_r der Grössen $\alpha_1, .., \alpha_n$ von $r - n + 1$ Dimensionen.

*) Cauchy l. c. p. 497.

Wenn nun $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ ist, so findet man aus

$$\begin{aligned} & a_0 \left(\frac{1}{f'(\alpha_1)} + \frac{1}{f'(\alpha_2)} + \ldots + \frac{1}{f'(\alpha_n)} \right) \\ + & a_1 \left(\frac{\alpha_1}{f'(\alpha_1)} + \frac{\alpha_2}{f'(\alpha_2)} + \ldots + \frac{\alpha_n}{f'(\alpha_n)} \right) \\ + & a_2 \left(\frac{\alpha_1^2}{f'(\alpha_1)} + \frac{\alpha_2^2}{f'(\alpha_2)} + \ldots + \frac{\alpha_n^2}{f'(\alpha_n)} \right) \\ + & \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

durch Addition der Colonnen die Summe

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} + \ldots + \frac{\varphi(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$$

und durch Addition der Zeilen den Werth dieser Summe, der verschwindet, wenn der Grad von $\varphi(x)$ geringer ist als $n-1$, der aber

$$a_n + a_{n+1} Q_{n+1} + \ldots$$

beträgt, wenn $\varphi(x)$ von einem höhern Grade ist *).

Anmerkung. Nach dem Fundamentalsatz über die gebrochenen rationalen Functionen ist

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-\alpha_1) f'(\alpha_1)} + \ldots + \frac{1}{(z-\alpha_n) f'(\alpha_n)}.$$

Entwickelt man beide Seiten dieser Identität nach fallenden Potenzen von z, so findet man

$$Q_r = \frac{\alpha_1^r}{f'(\alpha_1)} + \ldots + \frac{\alpha_n^r}{f'(\alpha_n)}$$

als Coefficienten von z^{-r-1} **).

10. Durch Entwickelung der Determinante (1)

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & . & \alpha_1^{n-1} \\ . & . & . & . \\ 1 & \alpha_n & . & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der $i$ten Zeile erhält man (§. 3, 3)

$$\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \delta_{i1} + \delta_{i2} \alpha_i + \ldots + \delta_{in} \alpha_i^{n-1}.$$

*) Den ersten Theil dieses Satzes hatte Euler Calc. integr. II §. 1169 gegeben. Durch Jacobi Crelle J. 14 p. 281 ist der Satz auf Functionen von 2 Variablen ausgedehnt worden.

**) Jacobi Disq. de fract. simpl. 1825 p. 5.

Denselben Werth hat (8)

$$(-1)^{n-i} f'(\alpha_i)\, \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Nun ist

$$f'(\alpha_i) = \alpha_i^{n-1} + C_{i1}\, \alpha_i^{n-2} + C_{i2}\, \alpha_i^{n-3} + \ldots,$$

wenn man durch C_{ik} die mit dem Zeichen $(-1)^k$ versehene Summe der Producte von k verschiedenen Grössen der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$ bezeichnet. Daher hat man die Identität

$$\delta_{ik} = (-1)^{n-i}\, C_{i,n-k}\, \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

$$\frac{\delta_{ik}}{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} = \frac{C_{i,n-k}}{f'(\alpha_i)}.$$

11. Aus dem linearen System

$$x_1 + x_2\, \alpha_1 + \ldots + x_n\, \alpha_1^{n-1} = u_1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_1 + x_2\, \alpha_n + \ldots + x_n\, \alpha_n^{n-1} = u_n$$

findet man nach §. 8, 1

$$x_k\, \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = u_1\, \delta_{1k} + \ldots + u_n\, \delta_{nk}$$

mithin (10)

$$x_k = \frac{u_1}{f'(\alpha_1)}\, C_{1,n-k} + \ldots + \frac{u_n}{f'(\alpha_n)}\, C_{n,n-k}.$$

Die ganze Function

$$\varphi(z) = x_1 + x_2\, z + \ldots + x_n\, z^{n-1}$$

welche für $z = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Werthe $u_1, \ldots, u_n$ annimmt, ist wie bekannt *)

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}\, \frac{f(z)}{z-\alpha_1} + \ldots + \frac{\varphi(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}\, \frac{f(z)}{z-\alpha_n}.$$

Dabei hat man nach der angegebenen Bezeichnung

$$\frac{f(z)}{z-\alpha_i} = z^{n-1} + C_{i1}\, z^{n-2} + \ldots$$

In der That wird durch die Vergleichung der Coefficienten von z^{k-1} die obige Angabe von x_k bestätigt.

---

*) Lagrange's Interpolationsformel (1795) J. de l'éc. polyt. Cah. 7—8 p. 417, welche von dem Fundamentalsatz über die gebrochenen rationalen Functionen sich nicht unterscheidet.

12. Aus dem linearen System

$$\begin{array}{llll} x_1 & + \; . \; . \; + \; x_n & = 1 \\ x_1 \alpha_1 & + \; . \; . \; + \; x_n \alpha_n & = t \\ . \; . & . \; . \; . \; . \; . & . \; . \\ x_1 \alpha_1^{n-1} & + \; . \; . \; + \; x_n \alpha_n^{n-1} & = t^{n-1} \end{array}$$

erhält man (§. 8, 1)

$$x_i \begin{vmatrix} 1 & . \; . & 1 \\ \alpha_1 & . \; . & \alpha_n \\ . & . \; . & . \\ \alpha_1^{n-1} & . \; . & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} . \; . & 1 & 1 & 1 & . \; . \\ . \; . & \alpha_{i-1} & t & \alpha_{i+1} & . \; . \\ . \; . & . & . & . & . \; . \\ . \; . & \alpha_{i-1}^{n-1} & t^{n-1} & \alpha_{i+1}^{n-1} & . \; . \end{vmatrix}$$

$$x_i \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \Delta(\ldots, \alpha_{i-1}, t, \alpha_{i+1}, \ldots)$$

Setzt man beiderseits das $i$te Element ans Ende, so bleibt übrig

$$x_i = \frac{f(t)}{(t-\alpha_i) f'(\alpha_i)} \text{ *)}.$$

13. Aus dem allgemeinern linearen System

$$\begin{array}{llll} x_1 & + \; . \; . \; + \; x_n & = u_1 \\ x_1 \alpha_1 & + \; . \; . \; + \; x_n \alpha_n & = u_2 \\ . & . \; . \; . \; . \; . \; . & . \; . \\ x_1 \alpha_1^{n-1} & + \; . \; . \; + \; x_n \alpha_n^{n-1} & = u_n \end{array}$$

findet man nach der angenommenen Bezeichnung (10)

$$x_i \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = u_1 \delta_{i1} + \; . \; . \; + u_n \delta_{in}$$

$$x_i f'(\alpha_i) = u_1 C_{i,n-1} + u_2 C_{i,n-2} + \; . \; . \text{ **)}.$$

In der That ist (11)

$$C_{i,n-1} + C_{i,n-2} z + C_{i,n-3} z^2 + \; . \; . = \frac{f(z)}{z - \alpha_i}$$

eine Function, welche für $z = \alpha_i$ auf $f'(\alpha_i)$ sich reducirt, während sie bei andern Werthen von z aus der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ verschwindet.

Anstatt der Grössen $C_{i,n-1}$, $C_{i,n-2}, \ldots$ findet man, wenn

$$f(z) = z^n + C_1 z^{n-1} + \; . \; . \; + C_{n-1} z + C_n$$

---

*) Lagrange Mém. de Berlin 1775 p. 185. Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 73.

**) Cauchy Anal. algebr. III, 1.

gegeben ist, andre Ausdrücke auf folgendem Wege*). Man bilde die Functionen

$$f_1(z) = z + C_1$$
$$f_2(z) = z^2 + C_1 z + C_2$$
$$f_3(z) = z^3 + C_1 z^2 + C_2 z + C_3$$

u. s. w. Dann hat man, weil $z^k - t^k$ durch $z - t$ theilbar ist,

$$\frac{f(z) - f(t)}{z - t} = f_{n-1}(z) + t f_{n-2}(z) + \ldots + t^{n-1}$$

und insbesondere, weil $f(\alpha_1)$, $f(\alpha_2)$, .. verschwinden,

$$\frac{f(z)}{z - \alpha_1} = f_{n-1}(z) + \alpha_1 f_{n-2}(z) + \ldots + \alpha_1^{n-1}$$
$$\frac{f(z)}{z - \alpha_2} = f_{n-1}(z) + \alpha_2 f_{n-2}(z) + \ldots + \alpha_2^{n-1}$$

u. s. w. Aus diesem System erhält man vermöge der gegebenen Gleichungen

$$f(z)\left\{\frac{x_1}{z - \alpha_1} + \frac{x_2}{z - \alpha_2} + \ldots + \frac{x_n}{z - \alpha_n}\right\}$$
$$= u_1 f_{n-1}(z) + u_2 f_{n-2}(z) + \ldots + u_n .$$

Demnach erscheinen x_1, x_2, .. als die Zähler der Partialbrüche, in welche man die gebrochene Function

$$\frac{u_1 f_{n-1}(z) + u_2 f_{n-2}(z) + \ldots + u_n}{f(z)}$$

zerlegen kann. Für $z = \alpha_i$ bleibt übrig

$$x_i f'(\alpha_i) = u_1 f_{n-1}(\alpha_i) + u_2 f_{n-2}(\alpha_i) + \ldots + u_n .$$

Hiernach sind die Ausdrücke $f_1(\alpha_i)$, $f_2(\alpha_i)$, .. gleichbedeutend mit den oben gegebenen C_{i1}, C_{i2}, .., und enthalten die Grösse α_i nicht, wie man bei ihrer Bildung bestätigt findet.

Wenn insbesondere $u_1 = 1$, $u_2 = t$, $u_3 = t^2$, .. ist, so wird

$$f_{n-1}(z) + t f_{n-2}(z) + \ldots + t^{n-1} = \frac{f(t) - f(z)}{t - z}$$

$$f_{n-1}(\alpha_i) + t f_{n-2}(\alpha_i) + \ldots + t^{n-1} = \frac{f(t)}{t - \alpha_i}$$

in Uebereinstimmung mit (12).

---

*) Lagrange Mém. de Berlin 1792 p. 248. Vergl. Scheibner Leipz. Berichte 1856 p. 65.

14. Eine homogene ganze Function der Variablen x und y von m Dimensionen

$$\sum_r a_r \binom{m}{r} x^{m-r} y^r$$

worin r alle Zahlen von 0 bis m und $\binom{m}{r}$ den $r$ten Binomialcoefficienten bei dem Exponenten m bedeutet, kann bei ungeradem m im Allgemeinen auf die Form

$$\sum_i (p_i x + q_i y)^m$$

gebracht werden, so dass i alle Zahlen von 1 bis $\frac{m+1}{2}$ bedeutet. Denn die $m+1$ Coefficienten $p_1, p_2, \dots, q_1, q_2 \dots$ sind durch die $m+1$ gegebenen Grössen $a_0, a_1, \dots a_m$ im Allgemeinen vollständig bestimmt. Bei geradem m bleibt, wenn man $i = 1, 2, \dots, \frac{m+2}{2}$ setzt, von den $m+2$ Coefficienten $p_1 . p_2, \dots, q_1 . q_2, \dots$ einer unbestimmt.

Um die Function

$$a_0 x^{2n-1} + a_1 \binom{2n-1}{1} x^{2n-2} y + \dots + a_{2n-1} y^{2n-1}$$

in die Form

$$(p_1 x + q_1 y)^{2n-1} + (p_2 x + q_2 y)^{2n-1} + \dots + (p_n x + q_n y)^{2n-1}$$

zu bringen*), setzt man

$$q_i = p_i \alpha_i \,, \qquad p_i^{2n-1} = b_i$$

und erhält die Bedingungen

$$\begin{aligned}
a_0 &= b_1 + \dots + b_n \\
a_1 &= b_1 \alpha_1 + \dots + b_n \alpha_n \\
a_2 &= b_1 \alpha_1^2 + \dots + b_n \alpha_n^2 \\
&\dots \\
a_{2n-1} &= b_1 \alpha_1^{2n-1} + \dots + b_n \alpha_n^{2n-1} .
\end{aligned}$$

Dann bildet man die Function

$$(z-\alpha_1) \dots (z-\alpha_n) = C_n + C_{n-1} z + \dots + C_1 z^{n-1} + z^n ,$$

---

*) SYLVESTER (Philos. Mag. 1851, II p. 391) hat diese Transformation gezeigt und den gesuchten Ausdruck die canonische Form der Function genannt. Ueber die canonische Form einer homogenen Function geraden Grades von 2 Variablen hat SYLVESTER a. a. O. und Cambr. and Dublin math. J. 9 p. 93 weitere Untersuchungen mitgetheilt. Vergl. CAYLEY Crelle J. 54 p. 48.

welche verschwindet, wenn z einen der Werthe α_1, α_2, .. annimmt, und gewinnt aus der 1ten, 2ten, .. Bedingung, indem man jedesmal die n folgenden Bedingungen hinzuzieht, das System von Gleichungen

$$\begin{array}{l} C_n a_0 + C_{n-1} a_1 + \cdot\cdot + C_1 a_{n-1} + a_n = 0 \\ C_n a_1 + C_{n-1} a_2 + \cdot\cdot + C_1 a_n + a_{n+1} = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot \qquad \cdot\quad\cdot\quad\cdot \qquad \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ C_n a_{n-1} + C_{n-1} a_n + \cdot\cdot + C_1 a_{2n-2} + a_{2n-1} = 0\,. \end{array}$$

Da nun zugleich

$$C_n + C_{n-1} z + \cdot\cdot + C_1 z^{n-1} + z^n = 0\,,$$

wenn z einen der Werthe α_1. .., α_n hat, so giebt es von 0 verschiedene Grössen C_1, .., C_n, welche diesen $n+1$ Gleichungen genügen, unter der Bedingung (§. 8, 3)

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdot\cdot & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & \cdot\cdot & a_{2n-1} \\ 1 & z & \cdot\cdot & z^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & \cdot\cdot & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & \cdot\cdot & a_n & z \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & \cdot\cdot & a_{2n-1} & z^n \end{vmatrix} = 0\,.$$

Diese Gleichung gehört zu den oben (5) betrachteten. Nachdem man ihre Wurzeln α_1, α_2, .., α_n berechnet hat, findet man die Grössen b_1, .., b_n aus den ersten n Bedingungen (13), und zwar bestimmt unter der Voraussetzung, dass die Wurzeln α_1, α_2, .. alle von einander verschieden sind.

15. Wenn die ganze Function $\varphi(t_1, .., t_n)$ in Bezug auf jede der Variablen den $(n-1)$ten Grad nicht übersteigt, und wenn

$$f(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2) \cdot\cdot (z-\alpha_n)\,,$$

so findet man durch wiederholte Anwendung von Lagrange's Interpolationsformel (11)

$$\frac{\varphi(t_1, ..)}{f(t_1)} = \sum_h \frac{\varphi(\alpha_h, ..)}{f'(\alpha_h)(t_1-\alpha_h)}$$

$$\frac{\varphi(\alpha_h, t_2, ..)}{f(t_2)} = \sum_i \frac{\varphi(\alpha_h, \alpha_i, ..)}{f'(\alpha_i)(t_2-\alpha_i)}$$

$$\frac{\varphi(t_1, .., t_n)}{f(t_1) \cdot\cdot f(t_n)} = \sum_{h,i,..,p} \frac{\varphi(\alpha_h, \alpha_i, .., \alpha_p)}{f'(\alpha_h) \cdot\cdot f'(\alpha_p)(t_1-\alpha_h) \cdot\cdot (t_n-\alpha_p)}$$

eine Summe von n^n Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für h, i, .., p alle Zahlen von 1 bis n setzt.

Wenn insbesondere die Function φ alternirend ist, mithin zu $\Delta(t_1, .., t_n)$ ein constantes Verhältniss hat (2), so verschwindet jedes Glied der Summe, in welchem die Numern $h, i, .., p$ nicht alle von einander verschieden sind, und man hat für $h, i, .., p$ nur die Permutationen von $1, 2, .., n$ zu setzen. Dabei ist (7)

$$f'(\alpha_h)\, f'(\alpha_i) \,..\, f'(\alpha_p) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)^2$$

und der Quotient $\Delta(\alpha_h, \alpha_i, .., \alpha_p) : \Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)$ hat den Werth 1 oder -1, je nachdem die Reihe $h, i, .., p$ mit $1, 2, .., n$ zu derselben Classe von Permutationen gehört oder nicht. Daher bilden die Glieder der Summe eine Determinante $n$ten Grades, und man hat *)

$$\frac{\Delta(t_1, .., t_n)\, \Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)}{f(t_1) \,..\, f(t_n)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Sigma \pm \frac{1}{t_1 - \alpha_1} \,..\, \frac{1}{t_n - \alpha_n}.$$

Anmerkung. Entwickelt man den Quotienten

$$\frac{\varphi(t_1, .., t_n)}{f(t_1) \,..\, f(t_n)}$$

nach fallenden Potenzen von $t_1, .., t_n$, und bezeichnet man den Coefficienten von $(t_1 t_2 .. t_n)^{-1}$ durch

$$\left[\frac{\varphi(t_1, .., t_n)}{f(t_1) \,..\, f(t_n)}\right]_{(t_1 .. t_n)^{-1}},$$

so erhält man auch in dem Falle, dass die Function φ in Bezug auf die einzelnen Variablen den $(n-1)$ten Grad übersteigt,

$$\left[\frac{\varphi(t_1, .., t_n)}{f(t_1) \,..\, f(t_n)}\right]_{(t_1 .. t_n)^{-1}} = \Sigma \frac{\varphi(\alpha_h, .., \alpha_p)}{f'(\alpha_h) \,..\, f'(\alpha_p)}$$

also insbesondere

$$\left[\frac{\Delta(t_1, .., t_n)\, \psi(t_1, .., t_n)}{f(t_1) \,..\, f(t_n)}\right]_{(t_1 .. t_n)^{-1}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Sigma \frac{\psi(\alpha_1, .., \alpha_n)}{\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)} \;{}^{**)}$$

$$\left[\frac{\Delta(t_1, .., t_n)^2 f'(t_1) \,..\, f'(t_n)\, t_1^{m_1} \,..\, t_n^{m_n}}{f(t_1) \,..\, f(t_n)}\right]_{(t_1 .. t_n)^{-1}}$$

$$= \Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)^2\, \Sigma\, \alpha_1^{m_1} \,..\, \alpha_n^{m_n} \;{}^{***)}.$$

---

*) Cauchy (Exerc. d'anal. 2 p. 154) hat diesen Satz gefunden und durch die im folgenden Artikel mitgetheilte Betrachtung bewiesen.

**) Jacobi Crelle J. 22 p. 368.

***) Betti Crelle J. 54 p. 98.

Die Glieder dieser beiden Summen werden aus den Permutationen der Grossen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ gebildet.

16. Dass die Determinante

$$C = \begin{vmatrix} \frac{1}{t_1 - \alpha_1} & \cdot & \cdot & \frac{1}{t_1 - \alpha_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{t_n - \alpha_1} & \cdot & \cdot & \frac{1}{t_n - \alpha_n} \end{vmatrix}$$

den angegebenen Werth (15)

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\Delta(t_1, \dots, t_n)\, \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{f(t_1) \dots f(t_n)}$$

besitzt, wird durch folgende Betrachtung erkannt. Wenn man die Zeilen der Determinante C der Reihe nach mit $f(t_1), f(t_2) \dots$ multiplicirt, so erhält man

$$C f(t_1) \dots f(t_n) = \Sigma \pm \frac{f(t_1)}{t_1 - \alpha_1} \dots \frac{f(t_n)}{t_n - \alpha_n}$$

eine ganze alternirende Function (2) sowohl von $t_1, \dots t_n$, als auch von $\alpha_1, \dots \alpha_n$, und theilbar durch $\Delta(t_1, \dots t_n)\, \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Der Quotient ist eine von den Grössen $t_1, \dots t_n, \alpha_1, \dots \alpha_n$ unabhängige Zahl, welche sich dadurch ermitteln lässt, dass man den Grössen $t_1, \dots t_n$ der Reihe nach die Werthe $\alpha_1, \dots \alpha_n$ zuertheilt. In diesem Falle verschwinden alle die Elemente der Determinante, welche neben der Diagonale stehn; daher bleibt von der Determinante nur ihr Anfangsglied übrig, welches in

$$f'(\alpha_1) f'(\alpha_2) \dots f'(\alpha_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^2$$

übergeht (7). Also ist

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

der gesuchte Quotient.

17. Der Coefficient γ_{ik} des Elements $\frac{1}{t_i - \alpha_k}$ in der Determinante C (16) entsteht nach §. 3. (1) aus C durch Weglassung von t_i und α_k in den Reihen $t_1, \dots t_n$ und $\alpha_1, \dots \alpha_n$ und durch Multiplication mit $(-1)^{i+k}$. Daher hat man

$$\gamma_{ik} = (-1)^{i+k} (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{\Delta(\dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots)\, \Delta(\dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots)}{\frac{f(t_1)}{t_1 - \alpha_k} \dots \frac{f(t_{i-1})}{t_{i-1} - \alpha_k} \frac{f(t_{i+1})}{t_{i+1} - \alpha_k} \dots \frac{f(t_n)}{t_n - \alpha_k}}.$$

Indem man noch die Function

$$g(z) = (z-t_1)(z-t_2)\ldots(z-t_n)$$

bildet, findet man (8)

$$\Delta(\ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots)\,\Delta(\ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots) = (-1)^{i+k}\frac{\Delta(t_1,\ldots)\,\Delta(\alpha_1,\ldots)}{g'(t_i)\,f'(\alpha_k)}$$

$$(t_1-\alpha_k)\ldots(t_{i-1}-\alpha_k)(t_{i+1}-\alpha_k)\ldots(t_n-\alpha_k) = (-1)^{n-1}\frac{g(\alpha_k)}{\alpha_k-t_i}$$

und mit Hülfe dieser Werthe

$$\gamma_{ik} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{\Delta(t_1,\ldots)\,\Delta(\alpha_1,\ldots)}{f(t_1)\ldots f(t_n)}\,\frac{f(t_i)\,g(\alpha_k)}{g'(t_i)\,f'(\alpha_k)}\,\frac{1}{\alpha_k-t_i}$$

$$\frac{\gamma_{ik}}{C} = -\frac{f(t_i)}{g'(t_i)}\,\frac{g(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)}\,\frac{1}{t_i-\alpha_k}.$$

18. Aus dem linearen System

$$\frac{x_1}{t_1-\alpha_1} + \ldots + \frac{x_n}{t_1-\alpha_n} = u_1$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\frac{x_1}{t_n-\alpha_1} + \ldots + \frac{x_n}{t_n-\alpha_n} = u_n$$

findet man nach §. 8, 1

$$C x_k = u_1\gamma_{1k} + \ldots + u_n\gamma_{nk}$$

mithin (17)

$$x_k = -\frac{g(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)}\left\{\frac{f(t_1)}{g'(t_1)}\,\frac{u_1}{t_1-\alpha_k} + \ldots + \frac{f(t_n)}{g'(t_n)}\,\frac{u_n}{t_n-\alpha_k}\right\}\text{*)}.$$

Anmerkung. Der besondere Fall, in welchem alle Zeilen und Colonnen des Systems

$$\begin{matrix} \frac{1}{t_1-\alpha_1} & \ldots & \frac{1}{t_1-\alpha_n} & u_1 \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \\ \frac{1}{t_n-\alpha_1} & \ldots & \frac{1}{t_n-\alpha_n} & u_n \end{matrix}$$

harmonische Reihen sind, kommt in der Theorie der approximativen Quadraturen vor (Gauss 1814 Comm. Gött. Tom. 3. Vergl. Jacobi Crelle J. 1 p. 301. Schellbach Crelle J. 16 p. 192. Scheibner Leipz. Berichte 1856 p. 73. u. A.), und ist von

*) Hadenkamp Crelle J. 22 p. 184. 25 p. 182. Liouville J. 11 p. 466. Hermite Crelle J. 52 p. 43.

JOACHIMSTHAL Crelle J. 48 p. 411 neu behandelt worden. Vergl. auch LIGOWSKI Grunert Archiv 36 p. 181.

19. Wenn man die Determinante (16 ff.)

$$C = \frac{\gamma_{i1}}{t_i - \alpha_1} + \ldots + \frac{\gamma_{in}}{t_i - \alpha_n}$$

nach t_i differentiirt, so erhält man eine neue Determinante, welche von C dadurch sich unterscheidet, dass die Elemente der $i$ten Zeile

$$\frac{-1}{(t_i - \alpha_1)^2}, \quad \ldots, \quad \frac{-1}{(t_i - \alpha_n)^2}$$

sind (§. 3, 15). Daher ist*)

$$(-1)^n \frac{\partial^n C}{\partial t_1 \ldots \partial t_n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{(t_1 - \alpha_1)^2} & \cdot & \cdot & \frac{1}{(t_1 - \alpha_n)^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{(t_n - \alpha_1)^2} & \cdot & \cdot & \frac{1}{(t_n - \alpha_n)^2} \end{vmatrix} = B\,.$$

20. Wenn man die Determinante B durch die Determinante C dividirt, so erhält man

$$\frac{B}{C} = \Sigma \frac{1}{(t_1 - \alpha_h)(t_2 - \alpha_i) \ldots (t_n - \alpha_p)}$$

eine Summe, deren Glieder gebildet werden, indem man für $h, i, \ldots, p$ alle Permutationen der Numern $1, 2, \ldots, n$ setzt**).

Beweis. Das Product

$$B f(t_1)^2 \ldots f(t_n)^2 = \Sigma \pm \left\{ \frac{f(t_1)}{t_1 - \alpha_1} \ldots \frac{f(t_n)}{t_n - \alpha_n} \right\}^2$$

ist eine ganze alternirende Function sowohl von $t_1, \ldots, t_n$, als auch von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, und theilbar durch $\Delta(t_1, \ldots, t_n)\,\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Der Quotient ist eine symmetrische Function $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$, welche in Bezug auf jede der Variablen den $(n-1)$ten Grad erreicht und daher (15) durch

$$f(t_1) \ldots f(t_n)\, \Sigma \frac{\varphi(\alpha_h, \ldots, \alpha_p)}{f'(\alpha_h) \ldots f'(\alpha_p)(t_1 - \alpha_h) \ldots (t_n - \alpha_p)}$$

dargestellt werden kann.

---

*) BORCHARDT Berl. Monatsbericht 1855 p. 165 und Crelle J. 53 p. 193.

**) BORCHARDT a. a. O. Vergl. JOACHIMSTHAL Crelle J. 53 p. 166.

Wenn nun $t_1, t_2, \ldots, t_n$ der Reihe nach die Werthe α_h, $\alpha_i, \ldots, \alpha_p$ erhalten, welche nicht alle von einander verschieden sind, so verschwindet

$$\frac{B\,f(t_1)^2 \ldots f(t_n)^2}{\Delta(t_1, \ldots)\,\Delta(\alpha_1, \ldots)},$$

weil nicht nur B, sondern auch $\frac{f(t_1)^2}{t_2 - t_1}$ verschwindet, während z. B. t_1 und t_2 mit α_h zusammenfallen. Also findet man alle nicht verschwindenden Glieder der Summe, indem man für $h, i, \ldots, p$ alle Permutationen der Numern $1, 2, \ldots, n$ setzt. Wenn aber $t_1, t_2, \ldots, t_n$ der Reihe nach die von einander verschiedenen Werthe $\alpha_h, \alpha_i, \ldots, \alpha_p$ erhalten, so bleibt von der Determinante

$$\Sigma \pm \left\{\frac{f(t_1)}{t_1 - \alpha_1} \cdots \frac{f(t_n)}{t_n - \alpha_n}\right\}^2$$

nur ein Glied $\varepsilon\,(f'(\alpha_h)\, f'(\alpha_i) \ldots f'(\alpha_p))^2$ übrig, während

$$\Delta(\alpha_h, \alpha_i, \ldots, \alpha_p) \quad \text{in} \quad \varepsilon\,\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

übergeht. Daher ist

$$\varphi(\alpha_h, \alpha_i, \ldots, \alpha_p) = \left\{\frac{f'(\alpha_h) \ldots f'(\alpha_p)}{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}\right\}^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} f'(\alpha_h) \ldots f'(\alpha_p),$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{B\,f(t_1) \ldots f(t_n)}{\Delta(t_1, \ldots)\,\Delta(\alpha_1, \ldots)} = \Sigma \frac{1}{(t_1 - \alpha_h) \ldots (t_n - \alpha_p)}.$$

Anmerkung. Nach (19) hat man die Identität

$$\Sigma \frac{1}{(t_1 - \alpha_h) \ldots (t_n - \alpha_p)} = \frac{(-1)^n}{C} \frac{\partial^n C}{\partial t_1 \ldots \partial t_n}$$

$$= (-1)^n \frac{f(t_1) \ldots f(t_n)}{\Delta(t_1, \ldots, t_n)} \frac{\partial^n}{\partial t_1 \ldots \partial t_n} \left\{\frac{\Delta(t_1, \ldots, t_n)}{f(t_1) \ldots f(t_n)}\right\}.$$

Der Differentialquotient (§. 3, 15) ist der Quotient einer alternirenden ganzen Function von $t_1, \ldots, t_n$ dividirt durch $f(t_1)^2 \ldots f(t_n)^2$. Indem man denselben durch $\Delta(t_1, \ldots, t_n)$ dividirt und den Quotienten mit $f(t_1) \ldots f(t_n)$ multiplicirt, erhält man die erzeugende Function aller ganzen symmetrischen Functionen von den Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$. Denn die Entwickelung der Identität nach fallenden Potenzen von $t_1, \ldots t_n$ giebt einerseits die symmetrische Function der Wurzeln

$$\Sigma\, \alpha_h^{m_1} \alpha_i^{m_2} \ldots \alpha_p^{m_n},$$

andrerseits den Ausdruck derselben durch die Coefficienten der Gleichung, worüber man in der angeführten Abhandlung weitern Aufschluss findet.

21. Wenn $F_1(z), \ldots, F_m(z)$ ganze Functionen und $x_1, \ldots, x_m$ veränderliche Argumente sind, welche für z gesetzt werden, so ist die Determinante $\Sigma \pm F_1(x_1) \ldots F_m(x_m)$ eine alternirende ganze Function der Argumente $x_1, \ldots, x_m$, mithin durch das Product der Differenzen $\Delta(x_1 \ldots, x_m)$ theilbar (2). Der Quotient kann unter der Voraussetzung $m < n$ und dass keine der Functionen den $(n-1)$ten Grad übersteigt, interpolatorisch aus den Werthen berechnet werden, welche die Functionen bei den gegebenen Werthen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ der Argumente annehmen. Bezeichnet man durch

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \; x_1, \ldots, x_m)$$

das Product der mn Differenzen, welche durch Subtraction aller Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von allen Grössen $x_1, \ldots, x_m$ entstehn, so ist

$$\frac{\Sigma \pm F_1(x_1) \ldots F_m(x_m)}{\Delta(x_1, \ldots, x_m)} = \Sigma \frac{\Sigma \pm F_1(\alpha_1) \ldots F_m(\alpha_m) D(\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n; x_1, \ldots, x_m)}{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) D(\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$$

eine Summe von $\binom{n}{m}$ Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ je m verschiedene Grössen der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ setzt*).

Beweis. Bildet man $\varphi(z) = (z-\alpha_1) \ldots (z-\alpha_n)$, so ist (11)

$$\frac{F_i(x_k)}{\varphi(x_k)} = \frac{F_i(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)(x_k-\alpha_1)} + \ldots + \frac{F_i(\alpha_n)}{\varphi'(\alpha_n)(x_k-\alpha_n)}$$

und nach der Multiplicationsregel (§. 5, 1)

$$\Sigma \pm \frac{F_1(x_1)}{\varphi(x_1)} \cdots \frac{F_m(x_m)}{\varphi(x_m)} = \Sigma \left\{ \Sigma \pm \frac{F_1(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)} \cdots \frac{F_m(\alpha_m)}{\varphi'(\alpha_m)} \cdot \Sigma \pm \frac{1}{x_1-\alpha_1} \cdots \frac{1}{x_m-\alpha_m} \right\}.$$

Nun ist (§. 3, 4)

$$\Sigma \pm \frac{F_1(x_1)}{\varphi(x_1)} \cdots \frac{F_m(x_m)}{\varphi(x_m)} = \frac{\Sigma \pm F_1(x_1) \ldots F_m(x_m)}{\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_m)},$$

ferner (7)

$$\varphi'(\alpha_1) \ldots \varphi'(\alpha_m) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^2 D(\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

---

*) Borchardt über eine Interpolationsformel. Abhandl. d. Berl. Acad. 1860 p. 1.

endlich (16)

$$\Sigma \pm \frac{1}{x_1 - \alpha_1} \cdot \cdot \frac{1}{x_m - \alpha_m} = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \frac{\Delta(x_1, \ldots, x_m)\, \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)}{D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m ; x_1, \ldots, x_m)}$$

$$\frac{\varphi(x_1) \cdot \cdot \varphi(x_m)}{D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m ; x_1, \ldots, x_m)} = D(\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n ; x_1, \ldots, x_m) .$$

Durch Einführung dieser Werthe erhält man sofort den zu beweisenden Ausdruck.

Die Anwendungen dieses Ausdrucks, namentlich auf die Reste, welche bei der Entwickelung des Quotienten einer ganzen Function $f(z)$ durch $\varphi(z)$ in einen Kettenbruch entstehn, und auf die Nenner der Näherungsbrüche für denselben Kettenbruch, findet man in der angeführten Abhandlung.

§. 11. Resultante von zwei ganzen Functionen.

1. Wenn z eine $n$te Wurzel der Einheit bedeutet, deren Werthe durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bezeichnet werden, so ist die ganze Function*)

$$y = \varphi(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$$

$n$deutig, mithin die Wurzel einer bestimmten Gleichung $n$ten Grades.

Um die Gleichung mit den Wurzeln $\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \ldots, \varphi(\alpha_n)$ aufzustellen, bilde man unter der Voraussetzung $z^n = 1$ das System

$$\begin{array}{rcl} y &=& a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} \\ zy &=& a_{n-1} + a_0 z + \ldots + a_{n-2} z^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z^{n-1} y &=& a_1 + a_2 z + \ldots + a_0 z^{n-1} \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{l} 0 = a_0 - y + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \\ 0 = a_{n-1} + (a_0 - y) z + a_1 z^2 + \ldots \end{array}$$

u. s. w. Nach Elimination von $z^0, z^1, z^2, \ldots$ (§. 8, 3) behält man die gesuchte Gleichung für y vom $n$ten Grade

*) Von WARING Misc. anal. 1762 p. 44 und EULER 1764 (Nov. Comm. Petrop. 9 p. 70) in die Algebra eingeführt. Vergl. LAGRANGE Reflexions .. 67 ff. (Mem. de Berlin 1771).

$$0 = \begin{vmatrix} a_0 - y & a_1 & . & . & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 - y & . & . & a_{n-2} \\ . & . & . & . & . \\ a_1 & a_2 & . & . & a_0 - y \end{vmatrix}$$

welcher in der That durch die Werthe $\varphi(\alpha_1), .., \varphi(\alpha_n)$ genügt wird. Denn wenn man z. B. zur ersten Colonne die mit $z, z^2, ..$ multiplicirten folgenden Colonnen addirt, so verschwinden alle Elemente der ersten Colonne.

2. Das mit dem Zeichen $(-1)^n$ versehene Product der Wurzeln $\varphi(\alpha_1) .. \varphi(\alpha_n)$ wird gefunden, indem man das von y unabhängige Glied der Gleichung durch den Coefficienten von y^n dividirt. Daher ist*)

$$\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2) .. \varphi(\alpha_n) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & . & . & a_{n-2} \\ . & . & . & . & . \\ a_1 & a_2 & . & . & a_0 \end{vmatrix}$$

Dasselbe Resultat kann man auf dem im Folgenden (6) bei dem allgemeinern Problem angezeigten Wege ableiten, indem man die Determinante (§. 10, 1)

$$\Delta(\alpha_1, .., \alpha_n)\varphi(\alpha_1) .. \varphi(\alpha_n) = \begin{vmatrix} \varphi(\alpha_1) & \alpha_1\varphi(\alpha_1) & \alpha_1^2\varphi(\alpha_1) & . & . \\ \varphi(\alpha_2) & \alpha_2\varphi(\alpha_2) & \alpha_2^2\varphi(\alpha_2) & . & . \\ . & . & . & & \end{vmatrix}$$

in das Product

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . \\ a_{n-1} & a_0 & . & . \\ . & . & & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & . & . \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & . & . \\ . & . & . & & \end{vmatrix}$$

zerlegt (§. 5. 1).

3. Die Determinante des Systems, dessen Zeilen durch cyclische Vertauschung aus der jedesmal vorhergehenden Zeile gebildet werden,

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & . & . & a_{n-2} \\ . & . & . & . & . \\ a_1 & a_2 & . & . & a_0 \end{vmatrix}$$

*) Dieser alte Satz ist bis jetzt auf einen bestimmten Autor nicht zurückgeführt worden. In der Angabe desselben von SPOTTISWOODE Crelle J. 51 p. 375 fehlt das Zeichen $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.

heisst die **Norm***) der *n*deutigen **Function** $\varphi(z)$. Von den n^n Gliedern des Products $\varphi(\alpha_1)\ldots\varphi(\alpha_n)$ bleiben nur die $1.2\ldots n$ Glieder der Determinante übrig. Z. B. für $n=3$ hat man

$$\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\varphi(\alpha_3) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 - 3a_0a_1a_2 .$$

In Fällen, welche eine unmittelbare Angabe des Products zulassen, wird umgekehrt die Determinante auf das Product zurückgeführt. Z. B.

I. Wenn $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ den Werth 1 haben, so ist

$$\alpha_i + \alpha_i^2 + \ldots + \alpha_i^{n-1} + 1 = 0 ,$$

$$\varphi(\alpha_1) = a_0 - 1, \ldots, \quad \varphi(\alpha_{n-1}) = a_0 - 1, \quad \varphi(\alpha_n) = a_0 - 1 + n ,$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & . \\ 1 & a_0 & 1 & . \\ 1 & 1 & a_0 & \\ . & . & & \end{vmatrix} = (a_0 - 1 + n)(a_0 - 1)^{n-1} .$$

II. Wenn $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine geometrische Progression bilden, und zwar $a_0 = 1$, $a_1 = v$, u. s. w., so ist

$$\varphi(z) = \frac{1 - v^n}{1 - vz} .$$

Nun sind $1 - v\alpha_1$, $1 - v\alpha_2, \ldots$ die Divisoren von $1 - v^n$, daher

$$\begin{vmatrix} 1 & v & v^2 & . & . & v^{n-1} \\ v^{n-1} & 1 & v & . & . & v^{n-2} \\ . & . & . & . & . & . \\ v & v^2 & v^3 & . & . & 1 \end{vmatrix} = (1 - v^n)^{n-1} .$$

III. Wenn $a_2, a_3, \ldots$ verschwinden, so sind $a_0 + a_1\alpha_1$, $a_0 + a_1\alpha_2 \ldots$ die Divisoren von $a_0^n - (-a_1)^n$, daher

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & & & \\ & a_0 & a_1 & & \\ & & . & . & \\ & & & a_0 & a_1 \\ a_1 & & & & a_0 \end{vmatrix} = a_0^n - (-a_1)^n .$$

*) Gauss hat 1831 die »Norm einer complexen Zahl« als das reale Product der complexen Zahl mit der conjugirten complexen Zahl eingeführt. Theoria resid. biquadr. II §. 30.

4. Wenn die ganze Function

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n = b_n(x-\beta_1)\ldots(x-\beta_n)$$

gegeben ist, und x eine Wurzel der Gleichung $g(x) = 0$ bedeutet, so ist die ganze Function

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = a_m(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_m)$$

$n$deutig, mithin die Wurzel einer bestimmten Gleichung $n$ten Grades.

Aus den Werthen

$$f(x), \quad xf(x), \ldots, x^{n-1}f(x), \quad g(x), \quad xg(x), \ldots, x^{m-1}g(x)$$

bilde man unter der Voraussetzung $g(x) = 0$ das System von $n+m$ Zeilen

$$\begin{array}{lllll}
0 = a_0 - y & + a_1 x & + \ldots & & \\
0 = & (a_0 - y)x & + \ldots & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
0 = & & & (a_0 - y)x^{n-1} + \ldots & \\
0 = b_0 & + b_1 x & + \ldots & & \\
0 = & b_0 x & + \ldots & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
0 = & & & b_0 x^{m-1} + \ldots &
\end{array}$$

Nach Elimination von $x^0, x^1 \ldots, x^{n+m-1}$ (§. 8, 3) bleibt die gesuchte Gleichung für y vom $n$ten Grade übrig

$$0 = \begin{vmatrix}
a_0 - y & a_1 & a_2 & \ldots & & \\
 & a_0 - y & a_1 & \ldots & & \\
 & & a_0 - y & \ldots & & \\
 & & & \ldots & \ldots & \ldots \\
b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & & \\
 & b_0 & b_1 & \ldots & & \\
 & & b_0 & \ldots & & \\
 & & & \ldots & \ldots & \ldots
\end{vmatrix}$$

welcher durch die Werthe $f(\beta_1), \ldots, f(\beta_n)$ genügt wird.

Anmerkung. Diese Gleichung trifft zusammen mit der nach Tschirnhaus *) zu bildenden Resolvente der Gleichung $g(x) = 0$. Dabei wird die Resolvente durch Verfügungen über

---

*) Brief an Leibniz 1677 April 17 und Acta Erud. 1683. Vergl. Lagrange Mém. de Berlin 1770. Réflexions .. 10 ff.

die Coefficienten der Hülfsfunction $f(x)$ zu einer besondern: mit jeder Wurzel y der Resolvente ist durch das System

$$g(x) = 0\,, \quad f(x) - y = 0$$

eine bestimmte Wurzel x der gegebenen Gleichung verbunden.

5. Das mit dem Zeichen $(-1)^n$ versehene Product der conjugirten Werthe $f(\beta_1), \ldots f(\beta_n)$ wird gefunden, indem man das von y unabhängige Glied R der aufgestellten Gleichung durch den Coefficienten von y^n dividirt. Nun ist

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . & & & \\ & a_0 & a_1 & . & . & . & & \\ & & a_0 & . & . & . & . & \\ & & & . & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & & & \\ & b_0 & b_1 & . & . & . & & \\ & & b_0 & . & . & . & . & \\ & & & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

eine Determinante $(n+m)$ten Grades, von welcher n Zeilen aus den Coefficienten von $f(x)$ und die folgenden m Zeilen aus den Coefficienten von $g(x)$ gebildet sind. Also ist

$$b_n^m f(\beta_1) \ldots f(\beta_n) = R\,.$$

Zugleich hat man nach der oben (§. 10, 21) angegebenen Bezeichnung

$$\begin{aligned} b_n^m f(\beta_1) \ldots f(\beta_n) &= a_m^n b_n^m D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m\,;\, \beta_1, \ldots, \beta_n) \\ &= (-1)^{mn} a_m^n b_n^m D(\beta_1, \ldots, \beta_n\,;\, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \\ &= (-1)^{mn} a_m^n g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_m)\,. \end{aligned}$$

Hiernach ist das angegebene Product im Werthe R eine symmetrische ganze Function sowohl der Wurzeln $\beta_1, \ldots, \beta_n$, als auch der Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, und zugleich eine homogene ganze Function sowohl der Coefficienten $a_0, \ldots, a_m$ von n Dimensionen, als auch der Coefficienten $b_0, \ldots, b_n$ von m Dimensionen, und heisst die Resultante der beiden ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$, während die Gleichung $R = 0$ die Resultante des Systems von Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ genannt wird. Vergl. §. 8, 3.

Anmerkung. Die Aufstellung der Resultante von zwei algebraischen Gleichungen (aequatio finalis) ist von Euler Mém.

de Berlin 1748 p. 234) auf die Berechnung von symmetrischen Functionen der Wurzeln der Gleichungen zurückgeführt worden. Zu demselben Zweck hat LAGRANGE (Mém. de Berlin 1769 p. 303) den Logarithmus von R berechnet. Die Ableitung der Resultante aus einem linearen System ist gleichzeitig von EULER (Mém. de Berlin 1764 p. 96) und BEZOUT (Mém. de Paris 1764 p. 298) angegeben worden. Von dieser Ableitung ist SYLVESTER's dialytische Methode (Philos. Mag. 1840 no. 101. Vergl. RICHELOT Crelle J. 21 p. 226) und HESSE's Verfahren (Crelle J. 27 p. 1) nicht wesentlich verschieden.

6. Die Identität des Products $b_n^m f(\beta_1) \,.\,.\, f(\beta_n)$ mit der Determinante R (5) wird ohne Rücksicht auf die Gleichung (4) erkannt*), indem man die Determinante

$$P = \begin{vmatrix} f(\beta_1) & \beta_1 f(\beta_1) & .\,. & \beta_1^{n-1} f(\beta_1) & g(\beta_1) & .\,. & \beta_1^{m-1} g(\beta_1) \\ . & . & .\,. & . & . & .\,. & . \\ f(\beta_n) & \beta_n f(\beta_n) & .\,. & \beta_n^{n-1} f(\beta_n) & g(\beta_n) & .\,. & \beta_n^{m-1} g(\beta_n) \\ f(\alpha_1) & \alpha_1 f(\alpha_1) & .\,. & \alpha_1^{n-1} f(\alpha_1) & g(\alpha_1) & .\,. & \alpha_1^{m-1} g(\alpha_1) \\ . & . & .\,. & . & . & .\,. & . \\ f(\alpha_m) & \alpha_m f(\alpha_m) & .\,. & \alpha_m^{n-1} f(\alpha_m) & g(\alpha_m) & .\,. & \alpha_m^{m-1} g(\alpha_m) \end{vmatrix}$$

in das Product von R mit der Determinante

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & .\,. & \beta_1^{n+m-1} \\ . & . & .\,. & . \\ 1 & \beta_n & .\,. & \beta_n^{n+m-1} \\ 1 & \alpha_1 & .\,. & \alpha_1^{n+m-1} \\ . & . & .\,. & . \\ 1 & \alpha_m & .\,. & \alpha_m^{n+m-1} \end{vmatrix}$$

zerlegt (§. 5, 1). Zufolge der Gleichungen

$$f(\alpha_1) = 0, \,.\,.\,, f(\alpha_m) = 0, \quad g(\beta_1) = 0, \,.\,.\,, g(\beta_n) = 0$$

ist aber (§. 4, 6 und §. 10, 1)

$$P = \begin{vmatrix} f(\beta_1) & .\,. & \beta_1^{n-1} f(\beta_1) \\ . & .\,. & . \\ f(\beta_n) & .\,. & \beta_n^{n-1} f(\beta_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g(\alpha_1) & .\,. & \alpha_1^{m-1} g(\alpha_1) \\ . & .\,. & . \\ g(\alpha_m) & .\,. & \alpha_m^{m-1} g(\alpha_m) \end{vmatrix}$$

$$= f(\beta_1) \,.\,.\, f(\beta_n)\, g(\alpha_1) \,.\,.\, g(\alpha_m)\, \Delta(\beta_1, \,.\,.)\, \Delta(\alpha_1, \,.\,.)\,.$$

---

*) BORCHARDT Crelle J. 57 p. 183. Vergl. HESSE krit. Zeitschr. f. Math. 1858 p. 483 und Tortolini Ann. di Matem. 1859 p. 5.

Ferner ist identisch

$$Q = \Delta(\beta_1, \ldots, \alpha_1, \ldots) = \frac{g(\alpha_1) \ldots g(\alpha_m)}{b_n^m} \Delta(\alpha_1, \ldots, \Delta(\beta_1, \ldots)),$$

folglich

$$b_n^m f(\beta_1) \ldots f(\beta_n) = R .$$

7. Die Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ ist zugleich die Resultante von $f(x)$ und $g(x) + \lambda f(x)$, wenn diese Function von demselben Grade ist als $g(x)$. Denn die Determinante R bleibt unverändert, wenn man zu m Zeilen des Systems der Reihe nach andre mit λ multiplicirte Zeilen desselben addirt (§. 3, 6), zur $(n+1)$ ten die 1te, zur $(n+2)$ ten die 2te, u. s. f.

Die Resultante von $f(x)$ und $(x-t)g(x)$ ist das Product der Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ mit der Resultante von $f(x)$ und $x-t$. Denn die gesuchte Resultante ist

$$b_n^m f(\beta_1) \ldots f(\beta_n) f(t) = R f(t) .$$

Wenn die ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ beide durch dieselbe ganze Function $h(x)$ theilbar sind, so verschwindet ihre Resultante. Z. B. $f(x)$ und $(x-\alpha_i) g(x)$ haben die Resultante $R f(\alpha_i) = 0$.

8. Umgekehrt schliesst man: Wenn die Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ verschwindet, so sind $f(x)$ und $g(x)$ beide durch eine bestimmte ganze Function $h(x)$ theilbar. Denn (5)

$$R = a_m^n b_n^m D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta_1, \ldots, \beta_n)$$

verschwindet nicht, wenn $a_m = 0$ oder $b_n = 0$, weil dabei eine Wurzel von $f(x) = 0$ oder von $g(x) = 0$ unendlich wird; R verschwindet also nur dann, wenn mindestens eine unter den Differenzen $\beta_i - \alpha_k$ verschwindet. Unter dieser Bedingung sind aber $f(x)$ und $g(x)$ durch $x - \beta_i$ theilbar.

Vermöge der Bedingung $R = 0$ hat die obige Gleichung (4) mindestens eine verschwindende Wurzel z. B. $f(\beta_i) = 0$, so dass $\beta_i = \alpha_k$ eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ ist.

Wenn nun die Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ eine oder mehr gemeinschaftliche Wurzeln besitzen, so haben die Functionen $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinschaftlichen Divisor ersten oder höhern Grades, dessen Coefficienten ganze homogene Functionen der gegebenen Coefficienten sind.

Jede gemeinschaftliche Wurzel ω genügt nämlich dem System von $n+m$ Gleichungen (4)

$$\begin{array}{llllll}
0 = a_0 & + a_1\omega & + a_2\omega^2 & + \;. \;. & & \\
0 = & a_0\omega & + a_1\omega^2 & + \;.\;.\;. & & \\
.\;.\;. & .\;.\;. & .\;.\;. & .\;.\;. & & \\
0 = & & & & a_0\omega^{n-1} + \;.\;. & \\
0 = b_0 & + b_1\omega & + b_2\omega^2 & + \;.\;. & & \\
0 = & b_0\omega & + b_1\omega^2 & + \;.\;.\;. & & \\
.\;.\;. & .\;.\;. & .\;.\;. & .\;.\;. & & \\
0 = & & & & b_0\omega^{m-1} + \;.\;. &
\end{array}$$

Also verschwindet nicht nur die durch R bezeichnete Determinante ($n+m$)ten Grades, sondern auch die aus den ersten $n+m-1$ Gleichungen gebildete Determinante ($n+m-1$)ten Grades

$$\begin{vmatrix}
a_0 + a_1\omega & a_2 & . & . & & \\
a_0\omega & a_1 & a_2 & . & . & \\
 & a_0 & a_1 & a_2 & . & . \\
 & & . & . & . & . \; . \\
b_0 + b_1\omega & b_2 & . & . & & \\
b_0\omega & b_1 & b_2 & . & . & \\
 & b_0 & b_1 & b_2 & . & . \\
 & & . & . & . & . \; .
\end{vmatrix} = R_{10} + R_{11}\omega\,,$$

ferner die aus den ersten $n+m-2$ Gleichungen gebildete Determinante ($n+m-2$)ten Grades

$$\begin{vmatrix}
a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 & a_3 & . & & & \\
a_0\omega + a_1\omega^2 & a_2 & a_3 & . & & \\
a_0\omega^2 & a_1 & a_2 & a_3 & . & \\
 & . & . & . & . & . \\
b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2 & b_3 & . & & & \\
b_0\omega + b_1\omega^2 & b_2 & b_3 & . & & \\
b_0\omega^2 & b_1 & b_2 & b_3 & . & \\
 & . & . & . & . & .
\end{vmatrix} = R_{20} + R_{21}\omega + R_{22}\omega^2\,,$$

u. s. w. Denn dadurch, dass man zu den ersten Colonnen dieser Determinanten die übrigen mit hinreichenden Potenzen von ω multiplicirten Colonnen addirt, verschwinden alle Elemente der ersten Colonnen zufolge der Voraussetzung. Die in der Entwickelung dieser verschwindenden Determinanten (§. 3, 5)

vorkommenden Coefficienten R_{10}, R_{11}, R_{20}, R_{21}, R_{22}, .. sind partiale Determinanten von R, mithin ganze homogene Functionen der Coefficienten von $f(x)$ und $g(x)$.

Wenn nun die Resultante R nicht verschwindet, so haben die ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ keinen gemeinschaftlichen Divisor.

Wenn $R = 0$ und R_{11} nicht zugleich verschwindet, so haben $f(x)$ und $g(x)$ den gemeinschaftlichen Divisor ersten Grades

$$R_{10} + R_{11}x\,.$$

Wenn $R = 0$, $R_{11} = 0$ und R_{22} nicht zugleich verschwindet, so haben $f(x)$ und $g(x)$ den gemeinschaftlichen Divisor zweiten Grades

$$R_{20} + R_{21}x + R_{22}x^2$$

u. s. w. Unter der Voraussetzung $R_{22} = 0$ verschwindet auch R_{21}, sonst wäre eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ unendlich.

Anmerkung. Wenn die Coefficienten von $f(x)$ und $g(x)$ Functionen von y sind, so beruht die Auflösung des Systems $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ auf der Bildung der Gleichung $R = 0$ und des hiermit bestimmten gemeinschaftlichen Divisors $h(x)$ von $f(x)$ und $g(x)$. Nachdem man aus der Gleichung $R = 0$ die Werthe von y berechnet hat, findet man aus der Gleichung $h(x) = 0$ die Werthe von x, welche zu den einzelnen Werthen von y gehören. Wenn $h(x)$ vom ersten Grade ist, so gehört zu jedem der berechneten Werthe von y ein Werth von x; wenn $h(x)$ vom zweiten Grade ist, so gehören zu den Werthen von y je zwei Werthe von x, u. s. w.

9. Wenn die ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinschaftlichen Divisor, und die Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ eine oder mehrere gemeinschaftliche Wurzeln haben, so bestehn unter den partialen Determinanten von R besondere Relationen, weil die oben (8) gebildeten Determinanten, welche Functionen einer gemeinschaftlichen Wurzel ω vom 1ten, 2ten, .. Grade sind, verschwinden.

Der gemeinschaftliche Divisor sei vom ersten Grade; die Determinante R werde durch $\Sigma \pm a_{00}a_{11} \,.\,.\, a_{n+m-1,n+m-1}$ und der Coefficient des Elements a_{ik} in R durch α_{ik} bezeichnet.

Vermöge der Voraussetzung $R = 0$ folgt aus dem System der $n + m$ Gleichungen

$$\begin{array}{llllll} 0 = & a_0 & + a_1 \omega & + \ldots & & \\ 0 = & & a_0 \omega & + a_1 \omega^2 & + \ldots & \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & \\ 0 = & b_0 & + b_1 \omega & + \ldots & & \\ 0 = & & b_0 \omega & + b_1 \omega^2 & + \ldots & \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & \end{array}$$

die Proportion (§. 8, 2)

$$1 : \omega : \omega^2 : \ldots : \omega^{n+m-1} = \alpha_{i0} : \alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \ldots : \alpha_{i,n+m-1}$$

d. h. die den Elementen irgend einer Zeile von R zugehörigen Coefficienten α_{i0}, α_{i1}, .. bilden eine geometrische Progression, deren Verhältniss die gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ ist*).

10. Wenn $\varphi(x) = h_0 + h_1 x + \ldots$ eine gegebene ganze Function von x ist, welche den $(n + m - 1)$ten Grad nicht übersteigt, so giebt es bestimmte Multiplicatoren p und q, ganze Functionen von x, die erstere $(n - 1)$ten, die andere $(m - 1)$ten Grades von der Art, dass man identisch hat**)

$$p f(x) + q g(x) = R \varphi(x) .$$

Die Möglichkeit der Identität erhellt aus der Anzahl der Coefficienten in p und q, über welche verfügt werden kann. Die Berechnung der Multiplicatoren p und q erfolgt, indem man die Zeilen des Systems

$$\begin{array}{rlllll} f(x) = & a_0 & + a_1 x & + \ldots & & \\ x f(x) = & & a_0 x & + a_1 x^2 & + \ldots & \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & \\ x^{n-1} f(x) = & & & & & a_0 x^{n-1} + \ldots \\ g(x) = & b_0 & + b_1 x & + \ldots & & \\ x g(x) = & & b_0 x & + b_1 x^2 & + \ldots & \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & \\ x^{m-1} g(x) = & & & & b_0 x^{m-1} + \ldots & \end{array}$$

der Reihe nach mit den Coefficienten (9) α_{0i}, α_{1i}, .. multiplicirt und die Producte addirt. Unter Anwendung der Bezeichnung

*) Vergl. Jacobi Crelle J. 15 p. 106.

**) Jacobi Crelle J. 15 p. 108.

$$p_i = \alpha_{0i} + \alpha_{1i}x + \ldots + \alpha_{n-1,i}x^{n-1}$$
$$q_i = \alpha_{ni} + \alpha_{n+1,i}x + \ldots + \alpha_{n+m-1,i}x^{m-1}$$

findet man (§. 3, 3) die Identität

$$p_i f(x) + q_i g(x) = Rx^i.$$

Bildet man nun mit Hülfe der gegebenen Coefficienten

$$p = h_0 p_0 + h_1 p_1 + \ldots + h_{n+m-1} p_{n+m-1}$$
$$q = h_0 q_0 + h_1 q_1 + \ldots + h_{n+m-1} q_{n+m-1}$$

so findet die geforderte Identität statt.

Anmerkung. Bei der Aufsuchung des gemeinschaftlichen Divisors von $f(x)$ und $g(x)$ hatte zuerst Euler (Mém. de Berlin 1764 p. 91)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{q}{p}$$

gesetzt, und die Identität $pf(x) + qg(x) = 0$ der Berechnung des gemeinschaftlichen Divisors

$$\frac{f(x)}{q} = -\frac{g(x)}{p}$$

zu Grunde gelegt. Die Identität

$$p_0 f(x) + q_0 g(x) = R$$

ist von Gauss (Demonstr. nova altera 8. Comm. Gött. III. 1815) in dem besondern Falle betrachtet worden, dass $g(x) = f'(x)$ ist.

11. Durch Differentiation der Identität (10)

$$p_i f(x) + q_i g(x) = Rx^i$$

ergiebt sich im Allgemeinen

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} f(x) + p_i x^k + \frac{\partial q_i}{\partial a_k} g(x) = \frac{\partial R}{\partial a_k} x^i,$$
$$\frac{\partial p_i}{\partial b_k} f(x) + q_i x^k + \frac{\partial q_i}{\partial b_k} g(x) = \frac{\partial R}{\partial b_k} x^i.$$

Wenn nun $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinschaftlichen Divisor ersten Grades haben, und ω die gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ ist, so hat man für $x = \omega$ *)

---

*) Richelot Crelle J. 21 p. 228.

$$p_i \omega^k = \frac{\partial R}{\partial a_k} \omega^i, \qquad q_i \omega^k = \frac{\partial R}{\partial b_k} \omega^i,$$

$$p_i = \frac{\partial R}{\partial a_i}, \qquad q_i = \frac{\partial R}{\partial b_i},$$

$$1 : \omega : \ldots : \omega^m = \frac{\partial R}{\partial a_0} : \frac{\partial R}{\partial a_1} : \ldots : \frac{\partial R}{\partial a_m}$$

$$1 : \omega : \ldots : \omega^n = \frac{\partial R}{\partial b_0} : \frac{\partial R}{\partial b_1} : \ldots : \frac{\partial R}{\partial b_n}$$

in Uebereinstimmung mit der oben (9) angegebenen Proportion.

12. Die Determinante $(n+m)$ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & . & . & \\ & & . & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & . & . & \\ & & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

kann durch Verbindung ihrer Zeilen in eine Determinante $n$ten oder $m$ten Grades zusammengezogen werden, je nachdem n oder m die grössre der beiden Zahlen ist.

Es sei zunächst $m = n$. Um die $n$te Zeile von R zu transformiren, multiplicire man die $n$te Zeile mit b_n und die vorangehenden Zeilen mit $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots$; ebenso die $2n$te Zeile mit a_n und die vorangehenden mit $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ Durch Subtraction der $2n$ten Zeile von der $n$ten, der $(2n-1)$ten Zeile von der $(n-1)$ten, .. bilde man nun unter Anwendung der Bezeichnung

$$d_{ik} = a_i b_k - a_k b_i$$

die Zeilen

$$\begin{matrix} d_{01} & d_{11} & . & . & d_{n-1,1} & d_{n1} & & & & \\ & d_{02} & . & . & d_{n-2,2} & d_{n-1,2} & d_{n2} & & & \\ & & . & . & . & . & . & . & & \\ & & & & d_{0n} & d_{1n} & d_{2n} & . & . & . \end{matrix}$$

Die Addition dieser Zeilen ergiebt für die $n$te Zeile von $b_n R$ die Elemente

$$d_{01} \quad d_{02} \quad . \quad . \quad d_{0n} \quad 0 \quad 0 \quad . \quad . \quad .$$

weil $d_{ii} = 0$, $d_{ki} = -d_{ik}$, und daher die Summe

$$d_{i1} + d_{i-1,2} + \ldots + d_{1i} = 0.$$

Auf dieselbe Weise transformirt man die $(n-1)$te, $(n-2)$te,.. Zeile von R. Man multiplicirt die $(n-i)$te Zeile mit b_n, die vorangehenden Zeilen mit b_{n-1}, b_{n-2}, .. u. s. f. und findet endlich die Elemente der $(n-i)$ten Zeile von $b_n{}^{i+1}R$ durch Addition der abgeleiteten Zeilen

$$\begin{array}{cccccccccc} d_{0,i+1} & d_{1,i+1} & \cdot\;\cdot & d_{n-i-1,i+1} & \cdot\;\cdot & d_{n,i+1} & & & & \\ & d_{0,i+2} & \cdot\;\cdot & d_{n-i-2,i+2} & \cdot\;\cdot & d_{n-1,i+2} & d_{n,i+2} & & & \\ & & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & d_{0n} & \cdot\;\cdot & d_{i+1,n} & d_{i+2,n} & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Bezeichnet man das $(k+1)$te Element der $(n-i)$ten Zeile durch c_{ik}, so hat man

$$c_{ik} = d_{0,i+k+1} + d_{1,i+k} + \cdot\;\cdot + d_{k,i+1}.$$

Analog ist

$$c_{ki} = d_{0,i+k+1} + d_{1,i+k} + \cdot\;\cdot + d_{i,k+1} = c_{ik},$$

weil die Summe $d_{i+1,k} + d_{i,k+1} + \cdot\;\cdot + d_{k,i+1}$ identisch verschwindet. Insbesondere hat man

$$c_{i,n-1} = d_{in}, \qquad c_{in} = 0,$$

weil a_r und b_r als verschwindend zu betrachten sind, wenn $r > n$.

Hiernach ist nun

$$b_n{}^n R = \begin{vmatrix} c_{n-1,0} & \cdot\;\cdot & c_{n-1,n-1} & & & \\ \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & & & \\ c_{00} & \cdot\;\cdot & c_{0,n-1} & & & \\ b_0 & \cdot\;\cdot & b_{n-1} & b_n & & \\ & b_0\;\cdot & \cdot & b_{n-1} & b_n & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Bezeichnet man die Determinante $\Sigma \pm c_{00} \cdot\cdot c_{n-1,n-1}$ durch S, so ist (§ 4, 6) $b_n{}^n R$ das Product von $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} S$ mit einer Determinante $n$ten Grades, die von ihrem Anfangsglied $b_n{}^n$ sich nicht unterscheidet. Also ist *)

$$R = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} S.$$

---

*) Vergl. unten (14).

Beispiele. Wenn $f(x)$ und $g(x)$ vom 2ten Grade sind, so wird

$$R = -S = -\begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} \\ d_{02} & d_{12} \end{vmatrix}.$$

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ vom 3ten Grade sind, so findet man

$$R = -S = -\begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} & d_{03} \\ d_{02} & d_{03} + d_{12} & d_{13} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} \end{vmatrix}.$$

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ vom 4ten Grade sind, so findet man

$$R = S = \begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} \\ d_{02} & d_{03} + d_{12} & d_{04} + d_{13} & d_{14} \\ d_{03} & d_{04} + d_{13} & d_{14} + d_{23} & d_{24} \\ d_{04} & d_{14} & d_{24} & d_{34} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinanten können nach §. 3, 16 weiter entwickelt werden, wobei die Identität

$$d_{ik}\, d_{lm} + d_{kl}\, d_{im} + d_{li}\, d_{km} = 0$$

(§. 3, 11) zur Verfügung steht.

13. Wenn $m < n$, so bilde man durch Hinzufügung von $n - m$ Zeilen,

$$\begin{matrix} b_0 & b_1 & . & . & b_n & & \\ & b_0 & b_1 & . & . & b_n & \\ & & . & . & . & . & . \end{matrix}$$

welche auf der Diagonale endigen, die Determinante $2n$ten Grades $b_n^{n-m} R$, und verwandle dieselbe auf die angegebene Art (12) in eine Determinante $n$ten Grades, so dass

$$b_n^{n-m} R = \begin{vmatrix} c_{n-1,0} & . & . & c_{n-1,n-1} \\ . & . & . & . \\ c_{00} & . & . & c_{0,n-1} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist aber durch b_n^{n-m} theilbar, als Product der beiden Determinanten $n$ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . & & \\ & a_0 & a_1 & . & . & \\ & & . & . & . & . \\ & & & . & . & . \\ c_{m-1,0} & c_{m-1,1} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ c_{00} & c_{01} & . & . & . & . \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_n & b_{n-1} & . & . & b_{m+1} & & \\ & b_n & . & . & b_{m+2} & & \\ & & . & . & . & & \\ & & & & b_n & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & . \\ & & & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Man findet nämlich durch Multiplication der ersten Colonne in der ersten Determinante mit den Colonnen der zweiten Determinante die erste Colonne des Products, u. s. w. In der That ist

$$a_0 b_{m+i+1} + \,.\,.\, + a_i b_{m+1} = d_{0,m+i+1} + \,.\,.\, + d_{i,m+1} = c_{mi}$$

weil $a_{m+1}, a_{m+2} \ldots$ als verschwindend zu betrachten sind. Die zweite Determinante hat den Werth $b_n^{\,n-m}$, also ist R der ersten Determinante gleich*).

14. Die abgekürzte Form der Resultante R (12) ist von Bezout (Mém. de Paris 1764 p. 317) durch ein Verfahren erreicht worden, welches in neuerer Zeit Jacobi (Crelle J. 15 p. 101. Vergl. Cauchy Exerc. d'Anal. 1840 p. 393) in Erinnerung gebracht und durch neue wesentliche Bemerkungen ergänzt hat. Aus den gegebenen Functionen $f(x)$ und $g(x)$, welche beide als Functionen $n$ten Grades vorausgesetzt werden, bildet man mit Hülfe geeigneter Multiplicatoren n bestimmte Functionen $(n-1)$ten Grades $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, welche mit $f(x)$ und $g(x)$ zugleich verschwinden. Dann ergiebt sich die Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ und der gemeinschaftliche Divisor dieser Functionen aus dem System von Gleichungen $u_0 = 0, \ldots, u_{n-1} = 0$. Es ist nämlich

$$f(x) = a_0 + \,.\,.\, + a_r x^r + (a_{r+1} + a_{r+2} x + \,.\,.\, + a_n x^{n-r-1}) x^{r+1}$$
$$g(x) = b_0 + \,.\,.\, + b_r x^r + (b_{r+1} + b_{r+2} x + \,.\,.\, + b_n x^{n-r-1}) x^{r+1}$$

folglich

$$\begin{aligned} & (b_{r+1} + b_{r+2} x + \,.\,.) f(x) - (a_{r+1} + a_{r+2} x + \,.\,.) g(x) \\ &= (a_0 + \,.\,.\, + a_r x^r)(b_{r+1} + \,.\,.\, + b_n x^{n-r-1}) \\ &- (b_0 + \,.\,.\, + b_r x^r)(a_{r+1} + \,.\,.\, + a_n x^{n-r-1}) \end{aligned}$$

eine Function $(n-1)$ten Grades, welche durch

---

*) Vergl. Rosenhain Crelle J. 28 p. 268.

$$u_r = c_{r0} + c_{r1}x + \ldots + c_{r,n-1}x^{n-1}$$

bezeichnet wird. Unter Anwendung der Bezeichnung

$$d_{ik} = a_i b_k - a_k b_i$$

findet man

$$c_{r0} = d_{0,r+1}\,, \quad c_{r1} = d_{0,r+2} + d_{1,r+1}\,, \quad c_{r2} = d_{0,r+3} + d_{1,r+2} + d_{2,r+1}\,, \ldots$$

$$c_{rs} = d_{0,r+s+1} + d_{1,r+s} + \ldots + d_{s,r+1}$$

und analog

$$c_{sr} = d_{0,s+r+1} + d_{1,s+r} + \ldots + d_{r,s+1} = c_{rs}\text{*)}\,,$$

weil die Summe $d_{s+1,r} + \ldots + d_{r,s+1}$ identisch verschwindet (12).

Bezeichnet man nun die Determinante $\Sigma \pm c_{00} \ldots c_{n-1,n-1}$ durch S, und den Coefficienten des Elements c_{ik} in S durch γ_{ik}, so findet man aus dem System

$$\begin{array}{lllll} u_0 & = c_{00} & + c_{01}x & + \ldots + & c_{0,n-1}x^{n-1} \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ u_{n-1} & = c_{n-1,0} & + c_{n-1,1}x & + \ldots + & c_{n-1,n-1}x^{n-1} \end{array}$$

(§. 8, 1) die Identität

$$u_0\gamma_{0i} + \ldots + u_{n-1}\gamma_{n-1,i} = Sx^i \quad (10)\,.$$

Jede gemeinschaftliche Wurzel ω der Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ genügt dem System $u_0 = 0, \ldots, u_{n-1} = 0$, weil diese letztern Functionen mit $f(x)$ und $g(x)$ zugleich verschwinden. Wenn nun S nicht verschwindet, so schliesst man wie oben (8), dass die Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ eine gemeinschaftliche Wurzel nicht haben. Wenn $S = 0$ und γ_{i0} nicht verschwindet, so haben die Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel, und es besteht die Proportion (vergl. 9)

$$1 : \omega : \ldots : \omega^{n-1} = \gamma_{i0} : \gamma_{i1} : \ldots : \gamma_{i,n-1}\,.$$

Man hat also insbesondere

$$\omega^k : \omega^s = \gamma_{ik} : \gamma_{is}\,,$$
$$\omega^i : \omega^r = \gamma_{si} : \gamma_{sr}\,.$$

Zugleich ist $\gamma_{si} = \gamma_{is}$ zufolge der Identität $c_{si} = c_{is}$ (§. 3. 13), folglich

$$\omega^{i+k} : \omega^{r+s} = \gamma_{ik} : \gamma_{rs}\,.$$

---

*) Jacobi l. c. p. 102.

Wenn nun die Summen $i + k$ und $r + s$ einander gleich sind, so sind γ_{ik} und γ_{rs} einander gleich, und man kann ihren gemeinschaftlichen Werth durch γ_{i+k} bezeichnen. Dann gilt die umfassendere Proportion *)

$$1 : \omega : \ldots : \omega^{2n-2} = \gamma_0 : \gamma_1 : \ldots : \gamma_{2n-2}$$

d. h. die Grössen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2n-2}$ bilden eine geometrische Progression, deren Verhältniss die gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ ist.

Wenn die Determinante S verschwindet, so haben $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinschaftlichen Divisor, und die Resultante R verschwindet (8). Nun ist S wie R (5) eine homogene ganze Function sowohl der Grössen $a_0, a_1, \ldots$, als auch der Grössen $b_0, b_1, \ldots$ von n Dimensionen, also ist der Quotient $S : R$ eine von diesen Grössen unabhängige Zahl. Das Anfangsglied von R ist $a_0{}^n b_n{}^n$ und kommt in dem Anfangsglied von

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} S = \begin{vmatrix} c_{n-1,0} & \cdot & \cdot & c_{n-1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{00} & \cdot & \cdot & c_{0,n-1} \end{vmatrix}$$

mit demselben Zeichen vor. Daher ist $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} S : R = 1$, wie oben (12) durch directe Transformation gezeigt wurde.

15. Cayley hat die Berechnung der Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ auf die Entwickelung der symmetrischen ganzen Function (§. 10, 2)

$$F(x\,y) = \frac{f(x)\,g(y) - f(y)\,g(x)}{y - x} = \Sigma\, c_{ik}\, x^i y^k$$

gegründet **). Dabei wird vorausgesetzt, dass $f(x)$ vom $m$ten Grade, $g(x)$ vom $n$ten Grade, und $m \leq n$ ist (4). Die Glieder der Summe werden dadurch gebildet, dass man für i und k alle Zahlen von 0 bis $n - 1$ setzt. Weil $F(x, y) = F(y, x)$, so ist $c_{ik} = c_{ki}$.

---

*) Jacobi l. c. p. 106.

**) Vergl. Sylvester's Mittheilung Philos. Trans. 1853 p. 516. Hermite Crelle J. 52 p. 47 Anm. Cayley Crelle J. 53 p. 366. Borchardt Crelle J. 53 p. 367 und 57 p. 112.

Setzt man $a_i b_k - a_k b_i = d_{ik}$, so erhält man

$$(a_0 + a_1 x + ..)(b_0 + b_1 y + ..) - (b_0 + b_1 x + ..)(a_0 + a_1 y + ..)$$
$$\begin{aligned} = d_{01}(y-x) + d_{02}(y^2 - x^2) & + .. + d_{0n}(y^n - x^n) \\ + d_{12}(xy^2 - x^2 y) & + .. + d_{1n}(xy^n - x^n y) \\ & + \ldots\ldots \\ & + d_{n-1,n}(x^{n-1} y^n - x^n y^{n-1}) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} F(x, y) = d_{01} + d_{02}(y+x) & + .. + d_{0n}(y^{n-1} + .. + x^{n-1}) \\ + d_{12} xy & + .. + d_{1n}(y^{n-2} + .. + x^{n-2}) xy \\ & + \ldots\ldots \\ & + d_{n-1,n} x^{n-1} y^{n-1} . \end{aligned}$$

Indem man die Glieder absondert, welche $x^i y^k$ enthalten, findet man wie oben (12 und 14)

$$c_{ik} = d_{0,i+k+1} + d_{1,i+k} + d_{2,i+k-1} + \ldots$$

Abgesehn von dieser Entwickelung hat man

$$F(\beta_i, \beta_k) = 0 , \qquad F(\beta_i, \beta_i) = f(\beta_i) g'(\beta_i) ,$$

folglich

$$\Sigma \pm F(\beta_1, \beta_1) .. F(\beta_n, \beta_n) = f(\beta_1) .. f(\beta_n) g'(\beta_1) .. g'(\beta_n) .$$

Wenn man beide Seiten durch $\varDelta(\beta_1, .., \beta_n)^2$ dividirt, so findet man (§. 10, 3 und 7)

$$\begin{aligned} \Sigma \pm c_{00} .. c_{n-1,n-1} & = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b_n{}^n f(\beta_1) .. f(\beta_n) \\ & = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b_n{}^{n-m} R \text{ (5)} . \end{aligned}$$

Die Theilbarkeit der Determinante durch $b_n{}^{n-m}$ ist oben (13) nachgewiesen worden.

16. Rosenhain hat die Resultante der Functionen $f(x)$ und $g(x)$ interpolatorisch durch die Werthe von $f(x)$ und $g(x)$ ausgedrückt, welche zu $m+n$ gegebenen Werthen des Arguments x gehören*). Diese Werthe von $f(x)$ sind eben so wenig von einander unabhängig, als die Werthe von $g(x)$, weil $f(x)$ durch $m+1$ und $g(x)$ durch $n+1$ Werthe bestimmt ist (§. 10, 11).

*) Crelle J. 30 p. 157.

Sind $x_1, x_2, \ldots$ gegebene Werthe von x, so multiplicire man die Determinante $(n+m)$ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & . & & \\ & & . & . & . & . & \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & . & & \\ & & . & . & . & . & \end{vmatrix}$$

zeilenweise mit

$$P = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & . & . & x_1^{n+m-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_{n+m} & . & . & x_{n+m}^{n+m-1} \end{vmatrix}$$

Bezeichnet man das Product durch $\Sigma \pm c_{11} \ldots c_{n+m,n+m}$, so hat man

$$c_{11} = f(x_1), \qquad c_{12} = x_1 f(x_1), \ldots, c_{1n} = x_1^{n-1} f(x_1),$$
$$c_{1,n+1} = g(x_1), \qquad c_{1,n+2} = x_1 g(x_1), \ldots, c_{1,n+m} = x_1^{m-1} g(x_1),$$

u. s. w., folglich RP

$$= \begin{vmatrix} f(x_1) & x_1 f(x_1) & \ldots & x_1^{n-1} f(x_1) & g(x_1) & x_1 g(x_1) & \ldots & x_1^{m-1} g(x_1) \\ . & . & & & & & & \\ f(x_{n+m}) & x_{n+m} f(x_{n+m}) & & & & & & \end{vmatrix}$$

Indem man diese Determinante in eine Summe von Producten partialer Determinanten $n$ten und $m$ten Grades zerlegt (§. 4, 4), findet man

$$\Sigma f(x_1) \ldots f(x_n) \Delta(x_1, \ldots, x_n) g(x_{n+1}) \ldots g(x_{n+m}) \Delta(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}),$$

eine Summe von $\binom{n+m}{m}$ Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für $1, 2, \ldots, n$ alle Combinationen von n verschiedenen Numern der Reihe $1, 2, \ldots, n+m$ setzt, und die übrigen Numern so ordnet, dass die Reihe aller Numern jedesmal mit der Reihe $1, 2, \ldots, n+m$ zu derselben Classe der Permutationen gehört. Nun ist identisch (§. 10, 21)

$$\frac{\Delta(x_1, \ldots, x_{n+m})}{\Delta(x_1, \ldots, x_n) \Delta(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})} = D(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$$

folglich, unabhängig von den Permutationen.

$$R = \Sigma \frac{f(x_1) \ldots f(x_n) g(x_{n+1}) \ldots g(x_{n+m})}{D(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})}.$$

Anmerkung. Mit Hülfe dieser Formel hat ROSENHAIN a. a. O. CAUCHY's interpolatorische Darstellung einer gebrochenen algebraischen Function *) abgeleitet.

Die Resultante von $f(x)$ und $(x-z)g(x)$ ist (7) $Rf(z)$, und wird nach der angegebenen Regel durch die Werthe der beiden Functionen ausgedrückt, welche zu $m+n+1$ Werthen von x gehören, wie folgt:

$$\Sigma \frac{f(x_0)\ldots f(x_n)\,g(x_{n+1})\ldots g(x_{n+m})(x_{n+1}-z)\ldots(x_{n+m}-z)}{D(x_0,\ldots,x_n;\,x_{n+1},\ldots,x_{n+m})}.$$

Die Resultante von $(x-z)f(x)$ und $g(x)$ ist $Rg(z)$ und nach derselben Regel

$$\Sigma \frac{f(x_0)\ldots f(x_{n-1})\,g(x_n)\ldots g(x_{n+m})(x_0-z)\ldots(x_{n-1}-z)}{D(x_0,\ldots,x_{n-1};\,x_n,\ldots,x_{n+m})}.$$

Durch Division erhält man, nachdem man den Zähler und den Nenner durch $g(x_0)\ldots g(x_{n+m})$ dividirt und den Quotienten $f(x_i):g(x_i)$ durch u_i bezeichnet hat,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\Sigma \frac{u_0\ldots u_n}{D(x_0,\ldots,x_n;\,x_{n+1},\ldots,x_{n+m})}(x_{n+1}-z)\ldots(x_{n+m}-z)}{\Sigma \frac{u_0\ldots u_{n-1}}{D(x_0,\ldots,x_{n-1};\,x_n,\ldots,x_{n+m})}(x_0-z)\ldots(x_{n-1}-z)}.$$

17. BORCHARDT hat die Resultante der Functionen $f(x)$ und $g(x)$, beide $n$ten Grades, interpolatorisch durch die Werthe von $f(x)$ und $g(x)$ ausgedrückt, welche zu $n+1$ gegebenen Werthen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des Arguments x gehören **).

Unter der Voraussetzung (15)

$$F(x,y) = \frac{f(x)g(y)-f(y)g(x)}{y-x} = \Sigma\, c_{ik}x^i y^k$$

ist die Determinante $\Sigma \pm c_{00}\ldots c_{n-1,n-1}$ der Resultante R gleich oder entgegengesetzt gleich. Nach §. 10, 3 hat man aber

$$\Sigma \pm c_{00}\ldots c_{n-1,n-1} = \frac{\Sigma \pm F(x_1,x_1)\ldots F(x_n,x_n)}{\Delta(x_1,\ldots,x_n)^2}.$$

Bildet man nun die Function $(n+1)$ten Grades

$$\varphi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

---

*) CAUCHY Anal. algébr. Note 5. Vergl. JACOBI Crelle J. 30 p. 127.

**) Berl. Monatsbericht 1859 p. 376 und Crelle J. 57 p. 111.

so ist (§. 10, 8)

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n)^2 = \frac{\Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)^2}{\varphi'(x_0)^2} = \frac{\varphi'(x_1)^2 \ldots \varphi'(x_n)^2}{\Delta(x_0, \ldots, x_n)^2} .$$

Nach Einführung der Elemente

$$h_{ik} = \frac{F(x_i, x_k)}{\varphi'(x_i)\,\varphi'(x_k)} = h_{ki}$$

erhält man daher

$$\Sigma \pm c_{00} \ldots c_{n-1,n-1} = \Delta(x_0, \ldots, x_n)^2 \Sigma \pm h_{11} \ldots h_{nn} .$$

Eine besondere Eigenschaft der Elemente dieser letztern Determinante ergiebt sich daraus, dass $F(x, y)$ in Bezug auf x vom $(n-1)$ten Grade, dagegen $\varphi(x)$ vom $(n+1)$ten Grade ist, dass also (§. 10, 9)

$$\frac{F(x_0, y)}{\varphi'(x_0)} + \frac{F(x_1, y)}{\varphi'(x_1)} + \ldots + \frac{F(x_n, y)}{\varphi'(x_n)} = 0 .$$

Demnach ist

$$h_{0k} + h_{1k} + \ldots + h_{nk} = 0 ,$$

also insbesondere

$$\begin{aligned} -h_{00} &= h_{01} + h_{02} + \ldots + h_{0n} \\ -h_{11} &= h_{01} + h_{12} + \ldots + h_{1n} \\ -h_{22} &= h_{02} + h_{12} + \ldots + h_{2n} \end{aligned}$$

u. s. w. Nun haben in der verschwindenden Determinante $(n+1)$ten Grades $(-1)^{n+1} \Sigma \pm h_{00} h_{11} \ldots h_{nn}$ alle Elemente gleiche Coefficienten (§. 3, 9), deren gemeinschaftlicher Werth durch die Formel

$$[0, 1, \ldots, n]$$

bezeichnet wird. Also ist

$$\Sigma \pm c_{00} \ldots c_{n-1,n-1} = (-1)^n \Delta(x_0, \ldots, x_n)^2 [0, 1, \ldots, n] .$$

18. Die Formel $[0, 1, \ldots, n]$ d. h. die Determinante $n$ten Grades

$$\begin{vmatrix} h_{01} + \ldots + h_{1n} & -h_{12} & -h_{13} & \cdot \\ -h_{21} & h_{02} + \ldots + h_{2n} & -h_{23} & \cdot \\ -h_{31} & -h_{32} & h_{03} + \ldots + h_{3n} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

ist von Borchardt a. a. O. nach den Producten der in der Diagonale stehenden Grössen $h_{01}, h_{02}, \ldots, h_{0n}$ entwickelt worden (vergl. §. 4, 2).

Der Theil derselben, welcher keine dieser Grössen enthält,

$$\begin{vmatrix} h_{12}+..+h_{1n} & -h_{12} & -h_{13} & . \\ -h_{21} & h_{12}+..+h_{2n} & -h_{23} & . \\ -h_{31} & -h_{32} & h_{13}+..+h_{3n} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

ist wiederum eine verschwindende Determinante (§. 3, 9), in welcher alle Elemente denselben Coefficienten haben, der durch [1, 2, .., n] bezeichnet wird. Daher ist der Theil der gesuchten Entwickelung, welcher je eine der Grössen h_{01}, h_{02}, .. enthält,

$$h_{01}\,[1, 2, \ldots, n] + h_{02}\,[1, 2, \ldots, n] + \ldots$$

Der Theil von [0, 1, .., n], welcher das Product $h_{01}h_{02}$ enthält, ist eine partiale Determinante ($n-2$)ten Grades, die aus der Determinante [2, 3, .., n] dadurch gebildet werden kann, dass man die in der Diagonale stehenden Grössen h_{23}, h_{24}, .., h_{2n} durch die Summen

$$h_{13}+h_{23}\,,\quad h_{14}+h_{24}\,,\ \ldots,\ h_{1n}+h_{2n}$$

ersetzt. Bezeichnet man die so transformirte Determinante durch

$$[\overline{1+2}, 3, \ldots, n]\,,$$

so ist der Theil von [0, 1, .., n], welcher je 2 von den Grössen h_{01}, h_{02}, .. enthält,

$$h_{01}h_{02}\,[\overline{1+2}, 3, 4, \ldots, n] + h_{01}h_{03}\,[\overline{1+3}, 2, 4, \ldots, n] + \ldots$$

Auf analoge Weise wird der Theil von [0, 1, .., n], welcher je 3 von jenen Grössen enthält, durch

$$h_{01}h_{02}h_{03}\,[\overline{1+2+3}, 4, 5, \ldots] + h_{01}h_{02}h_{04}\,[\overline{1+2+4}, 3, 5, \ldots] + \ldots$$

ausgedrückt, indem man [$\overline{1+2+3}$, 4, 5, ..] aus [3, 4, 5, ..] dadurch ableitet, dass man die in der Diagonale stehenden Grössen h_{34}, h_{35}, .. durch die Summen

$$h_{14}+h_{24}+h_{34}\,,\qquad h_{15}+h_{25}+h_{35}\,,\ \ldots$$

ersetzt. U. s. w. So entsteht die Recursionsregel

$$\begin{aligned}[0, 1, \ldots, n] = \Sigma h_{01}\,[1, 2, \ldots] &+ \Sigma h_{01}h_{02}\,[\overline{1+2}, 3, \ldots] \\ &+ \Sigma h_{01}h_{02}h_{03}\,[\overline{1+2+3}, 4, \ldots] + \ldots \\ &+ h_{01}h_{02}\ldots h_{0n}\,.\end{aligned}$$

Zufolge derselben ist

$$[0\,,1] = h_{01}$$

$$[0\,,1\,,2] = \Sigma h_{01}\,[1\,,2] + h_{01}h_{02}$$

$$= h_{01}h_{12} + h_{02}h_{12} + h_{01}h_{02}$$

$$[0\,,1\,,2\,,3] = \Sigma h_{01}\,[1\,,2\,,3] + \Sigma h_{01}h_{02}\,[\overline{1+2}\,,3] + h_{01}h_{02}h_{03}$$

$$= (h_{01} + h_{02} + h_{03})\,[1\,,2\,,3] + h_{01}h_{02}\,[\overline{1+2}\,,3]$$

$$+ h_{01}h_{03}\,[\overline{1+3}\,,2] + h_{02}h_{03}\,[\overline{2+3}\,,1] + h_{01}h_{02}h_{03}\,.$$

Die Formel $[1, 2, 3]$ hat 3 Glieder, die Formel $[\overline{1+2}, 3]$ hat deren 2, also hat $[0, 1, 2, 3]$ deren 4^2. Ebenso erkennt man, dass die Formel

$$[\overline{1+2+\,.\,.+k},\;\; k+1,\;\; k+2,\;\; k+3]$$

$3^2k + 3\,.\,2k + k^3 = k(k+3)^2$ Glieder hat. Unter der Annahme, dass für die Werthe von m, welche eine bestimmte Grenze nicht übersteigen, die Formel

$$[\overline{1+2+\,.\,.+k},\;\; k+1,\;.\,.\,,\;\; k+m]$$

$k(k+m)^{m-1}$ Glieder besitzt, findet man vermöge der Recursionsregel für

$$[\overline{1+2+\,.\,.+k},\;\; k+1,\;.\,.\,,\;\; k+m+1]$$

die Anzahl der Glieder

$$k(m+1)(1+m)^{m-1} + k^2\binom{m+1}{2}\,.\,2(2+m-1)^{m-2} + k^3\binom{m+1}{3}\,.\,3(3+m-2)^{m-3} + \,.\,.$$

$$= k(m+1)^m + k^2m(m+1)^{m-1} + k^3\binom{m}{2}(m+1)^{m-2} + \,.\,.$$

$$= k(k+m+1)^m\,.$$

Demnach ist die bis zu $m = 3$ gültige Annahme unbeschränkt richtig.

19. Die Resultante der Function $n$ten Grades $f(x)$ und der derivirten Function $f'(x)$ ist (5)

$$a_n^{\,n-1}f'(\alpha_1)\,.\,.\,f'(\alpha_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 & . & . & & \\ & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & . & . & \\ & & . & . & . & . & . \\ a_0 & a_1 & a_2 & . & . & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & . & . & \\ & & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

wenn das System n Zeilen der ersten Art und $n-1$ Zeilen der zweiten Art hat. Subtrahirt man die mit n multiplicirte letzte Zeile von der $n$ten, so erhält die $n$te Zeile folgende Elemente

$$0, \ldots, 0, \quad -na_0, \quad -(n-1)a_1, \ldots, \quad -a_{n-1}, \quad 0$$

und die Resultante reducirt sich (§. 2, 5) auf das Product von a_n mit einer Determinante $(2n-2)$ten Grades, welche durch A bezeichnet wird. Nach §. 10, 7 ist

$$A = a_n^{n-2} f'(\alpha_1) \ldots f'(\alpha_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{2n-2} \Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2,$$

eine symmetrische ganze Function der Wurzeln $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ (vergl. §. 10, 6) und eine homogene ganze Function der Coefficienten $a_0, \ldots, a_n$ von $2n-2$ Dimensionen, welche die Discriminante der ganzen Function $f(x)$ genannt wird*). Wenn a_n verschwindet, so wird eine der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ unendlich gross; dabei verschwindet die Discriminante im Allgemeinen nicht, sondern wird zur Discriminante einer Function $(n-1)$ten Grades.

Die Discriminante des Products $f(x)\,g(x)$ erscheint hiernach (abgesehn vom Zeichen) als das Product der Discriminanten von $f(x)$ und $g(x)$ multiplicirt mit dem Quadrat der Resultante von $f(x)$ und $g(x)$. Wenn A die Discriminante von $f(x)$ ist, so findet man z. B. für $(x-t)\,f(x)$ die Discriminante $A\,f(t)^2$.

20. Wenn die Discriminante von $f(x)$ nicht verschwindet, so haben $f(x)$ und $f'(x)$ keinen gemeinschaftlichen Divisor (8) und die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind sämmtlich von einander verschieden.

Wenn die Discriminante von $f(x)$ verschwindet, so haben $f(x)$ und $f'(x)$ einen gemeinschaftlichen Divisor und die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind nicht alle von einander verschieden. Der gemeinschaftliche Divisor theilt auch die Function $pf(x) + qxf'(x)$, welche aus der gegebenen Function dadurch

---

*) Gauss Demonstr. nova altera 6 (Comm. Gott. Vol. 3) hatte dieser Formel den Namen »Determinante der Function $f(x)$ oder der Gleichung $f(x) = 0$« beigelegt. Vergl. Joachimsthal Crelle J. 33 p. 371. Jacobi Crelle J. 40 p. 244. Bei dem jetzigen Sprachgebrauch ist der von Sylvester (Philos. Mag. 1851, II p. 406) gebildete Name »Discriminante« bezeichnender.

abgeleitet werden kann, dass man ihre Coefficienten a_0, a_1, .. der Reihe nach mit den Gliedern einer beliebigen arithmetischen Progression multiplicirt, und welche vor Erfindung der Differentialrechnung von HUDDE 1657 *) zur Bestimmung mehrfacher Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ gebildet worden ist.

Wenn $f'(x)$ und $f''(x)$ den gemeinschaftlichen Divisor t^k haben, und die Discriminante von t nicht verschwindet, so ist $f(x)$ durch t^{k+1} theilbar. Es sei z. B.

$$f(x) = t^k u\,,$$

$$f'(x) = kt^{k-1}t'u + t^k u' = t^k v\,.$$

Wenn nun t' und t einen gemeinschaftlichen Divisor nicht haben, so ist u durch t, also $f(x)$ durch t^{k+1} theilbar.

21. Die Function $f(x)$ kann als ein besonderer Werth der homogenen Function von 2 Variablen und n Dimensionen

$$u = A_0 y^n + \binom{n}{1} A_1 y^{n-1} x + \binom{n}{2} A_2 y^{n-2} x^2 + \ldots + A_n x^n$$

angesehn werden**). Die Binomialcoefficienten sind den Coefficienten der homogenen Function als Factoren beigegeben, damit die durch n getheilten Differentialquotienten von u Coefficienten derselben Art erhalten, und damit u eine $n$te Potenz in dem Falle wird, dass $A_0, A_1, \ldots, A_n$ eine geometrische Progression bilden.

Nach der Fundamentaleigenschaft der homogenen Functionen hat man die Identität

$$nu = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Der gemeinschaftliche Divisor von u und $\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x}$ ist also auch ein Divisor von $\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial y}$. Die unter der Voraussetzung $y = 1$ gebildete Resultante von $\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial y}$ ist wie die Discriminante

*) HUDDE Epist. I Reg. 10 in SCHOOTEN's Ausgabe von DESCARTES' Geometrie.

**) Dieses wichtige Hülfsmittel der Analysis ist von NEWTON Arithm. univ. Inventio divisorum p. 43, PLÜCKER System d. anal. Geom. §. 1, 7, HESSE Crelle J. 28 p. 102, JOACHIMSTHAL Crelle J. 33 p. 373, JACOBI Crelle J. 40 p. 247 und Andern, zu dem gegenwärtigen Zweck von SALMON higher plane curves p. 296 angewendet worden.

von $f(x)$ eine homogene ganze Function der Coefficienten $a_0, a_1, .., a_n$ von $2n-2$ Dimensionen und verschwindet zugleich mit der Discriminante von $f(x)$. Daher hat jene Resultante zu dieser Discriminante ein von den Coefficienten $a_0, a_1, ..$ unabhängiges Verhältniss.

In der That, wenn man in der Determinante Δ (19) jede der letzten $n-2$ Zeilen mit n multiplicirt, und von ihnen der Reihe nach die 2te, 3te, .. Zeile des Systems subtrahirt, so findet man nach Umstellung der $n$ten Zeile

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 & . & . & & \\ & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & . & . & \\ & & . & . & . & . & . \\ na_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & . & . & & \\ & na_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & . & . & \\ & & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

d. i. die Resultante von $f'(x)$ und $nf(x) - xf'(x)$.

Beispiele. Die Discriminante der Function 2ten Grades

$$a_0 + 2a_1 x + a_2 x^2$$

ist die Resultante von $a_1 + a_2 x$ und $a_0 + a_1 x$, nämlich

$$a_1^2 - a_0 a_2 .$$

Die Discriminante von $a_0 + 3a_1 x + 3a_2 x^2 + a_3 x^3$ ist die Resultante von

$$a_1 + 2a_2 x + a_3 x^2$$
$$a_0 + 2a_1 x + a_2 x^2$$

nämlich in der verkürzten Gestalt (12)

$$-\begin{vmatrix} 2(a_1^2 - a_0 a_2) & a_1 a_2 - a_0 a_3 \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 & 2(a_2^2 - a_1 a_3) \end{vmatrix} .$$

Ebenso findet man die Discriminante von

$$a_0 + 4a_1 x + 6a_2 x^2 + 4a_3 x^3 + a_4 x^4 ,$$

$$-\begin{vmatrix} 3(a_1^2 - a_0 a_2) & 3(a_1 a_2 - a_0 a_3) & a_1 a_3 - a_0 a_4 \\ 3(a_1 a_2 - a_0 a_3) & 9a_2^2 - 8a_1 a_3 - a_0 a_4 & 3(a_2 a_3 - a_1 a_4) \\ a_1 a_3 - a_0 a_4 & 3(a_2 a_3 - a_1 a_4) & 3(a_3^2 - a_2 a_4) \end{vmatrix} .$$

22. Das in der Discriminante von $f(x)$ enthaltene Product aller positiven und negativen Differenzen zwischen den Wurzeln

$\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ der Gleichung $f(x) = 0$ ist der Quotient des bekannten Gliedes durch den Coefficienten des höchsten Gliedes in der geordneten Gleichung, deren Wurzeln die genannten Differenzen sind *).

Um diese Gleichung zu bilden, bemerke man, dass dem System

$$f(x) = 0\,, \qquad f(x+y) = 0$$

genügt wird, indem man für x und $x + y$ alle Wurzeln $\alpha_1, .., \alpha_n$, mithin für y alle Differenzen der Wurzeln, unter denen n verschwinden, und für x den jedesmaligen Subtrahenden setzt. Dabei verschwindet die Resultante R der beiden durch $f(x)$ und $f(x+y)$ bezeichneten Functionen von x (8). Also ist R durch y^n theilbar, und $R : y^n = 0$ die Gleichung, deren Wurzeln die Differenzen zwischen jeder der Grössen $\alpha_1, .., \alpha_n$ und den übrigen Grössen dieser Reihe sind. Diese Differenzen sind aber paarweise entgegengesetzt gleich, also kommen in $R : y^n$ nur gerade Potenzen von y vor.

Unmittelbar findet man die von den verschwindenden Wurzeln befreite Gleichung, indem man **) von dem System

$$\text{(I)} \qquad f(u+v) = 0\,, \qquad f(u-v) = 0$$

ausgeht, welchem durch die Werthe

$$2u = \alpha_i + \alpha_k\,, \qquad 2v = \alpha_i - \alpha_k$$

genügt wird. Dieselben Auflösungen hat das System

$$\text{(II)} \qquad \frac{f(u+v) + f(u-v)}{2} = 0\,, \qquad \frac{f(u+v) - f(u-v)}{2} = 0\,,$$

dessen erste Gleichung nur gerade, und dessen zweite Gleichung nur ungerade Potenzen von v enthält. Weil $f(u+v) - f(u-v)$ durch v theilbar ist, so umfasst das System (II) die beiden Systeme

*) Diese unter dem Namen »équation aux carrés des differences« bekannte Gleichung ist von Waring Misc. analyt. 1762 p. 17 mit Hülfe von symmetrischen Functionen der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, ..$ construirt und zur Untersuchung der Wurzeln einer gegebenen Gleichung gebraucht worden. Besondere Ausführungen für die Gleichungen 4ten und 5ten Grades hat Waring in den Philos. Transact. 1763 p. 294 mitgetheilt. Die Ableitung der erwähnten Gleichung durch Elimination wurde von Euler Calc. diff. II, §. 244 gezeigt, und ausführlich von Lagrange (Mém. de Berlin 1767 p. 311 art. 8. Résolution des équat. art. 8 und Note 3) behandelt.

**) Nach Borchardt's Angabe.

$$\text{(III)} \qquad \frac{f(u+v)+f(u-v)}{2} = 0\,, \qquad v = 0$$

und

$$\text{(IV)} \qquad \frac{f(u+v)+f(u-v)}{2} = 0\,, \qquad \frac{f(u+v)-f(u-v)}{2v} = 0\,.$$

Dem System (IV) wird durch die Werthe

$$2u = \alpha_i + \alpha_k\,, \qquad 2v = \alpha_i - \alpha_k$$

unter der Beschränkung genügt, dass i und k verschiedene Zahlen der Reihe 1, 2, . . , n bedeuten. Bildet man nun die Resultanten $\psi(v^2)$ und $\chi(u)$ der Functionen

$$\frac{f(u+v)+f(u-v)}{2} \quad \text{und} \quad \frac{f(u+v)-f(u-v)}{2v}\,,$$

jene in Bezug auf die Variable u, diese in Bezug auf v^2, so ist

$$\psi(v^2) = 0\,, \quad \text{wenn } v^2 = \frac{1}{4}(\alpha_i - \alpha_k)^2\,,$$

$$\chi(u) = 0\,, \quad \text{wenn } u = \frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_k)\,.$$

§. 12. Die Functionaldeterminanten.

1. Wenn n Functionen $f_1, f_2, .., f_n$ der n Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ gegeben sind und f_{ik} den partialen Differentialquotienten von f_i in Bezug auf die Variable x_k bedeutet, so dass

$$f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\,,$$

so heisst die Determinante $n$ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdot & \cdot & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdot & \cdot & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdot & \cdot & f_{nn} \end{vmatrix}$$

die Determinante des Systems der Functionen oder die Functionaldeterminante des Systems*). Dieselbe reducirt sich auf eine Determinante niederen Grades, wenn z. B. f_1 nur von x_1, f_2 nur von x_1 und x_2 abhängig ist (§. 2, 5).

*) Jacobi de determ. functionalibus (Crelle J. 22 p. 319) §. 5.

Von der Functionaldeterminante bleibt nur das Anfangsglied übrig, wenn f_1 eine Function von x_1, f_2 eine Function von x_1 und x_2, f_3 eine Function von x_1, x_2 und x_3 u. s. f. ist (§. 2, 7).

2. Durch f_1 werde eine der n gegebenen Functionen bezeichnet, in welcher die Variable x_1 nicht fehlt; dann ist x_1 eine bestimmte Function von $f_1, x_2, .., x_n$, und die übrigen Functionen können von $f_1, x_2, .., x_n$ abhängig gemacht werden. Durch f_2 werde eine der $n-1$ transformirten Functionen bezeichnet, in welcher die Variable x_2 nicht fehlt; dann ist x_2 eine bestimmte Function von $f_1, f_2, x_3, .., x_n$, und die übrigen $n-2$ transformirten Functionen können von $f_1, f_2, x_3, .., x_n$ abhängig gemacht werden. Durch f_3 werde eine der letztern Functionen bezeichnet, in der x_3 nicht fehlt, u. s. w. Demnach erscheint

$$\begin{array}{llllll} f_1 \text{ als Function von } & x_1, & x_2, & .. & & \\ f_2 \quad \dots\dots & f_1, & x_2, & x_3, & .. & \\ f_3 \quad \dots\dots & f_1, & f_2, & x_3, & x_4, & .. \\ \dots\dots & & & & & \\ f_n \quad \dots\dots & f_1, & f_2, & .., & f_{n-1}, & x_n. \end{array}$$

Indem man die partialen Differentialquotienten der so transformirten Functionen von denen der gegebenen Functionen durch hinzugefügte Klammern unterscheidet, erhält man die Functionaldeterminante des gegebenen Systems in Form des Products *)

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \cdot \cdot \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right),$$

worin $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)$ von $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ sich nicht unterscheidet, während $\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)$ von $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ dadurch unterschieden ist, dass f_2 im ersteren Falle als Function von $f_1, x_2, .., x_n$, im letzteren Falle als Function von $x_1, x_2, .., x_n$ betrachtet wird u. s. w.

Beweis. Nach der über f_i gemachten Voraussetzung ist

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial f_1}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\right) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_k}\right) + \cdot\cdot + \left(\frac{\partial f_i}{\partial f_{i-1}}\right)\left(\frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_k}\right) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right).$$

*) Jacobi det. funct. §. 18.

Daher ist nach §. 5, 1

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial f_1}\right) & 1 & 0 & \cdot \\ \left(\frac{\partial f_3}{\partial f_1}\right) & \left(\frac{\partial f_3}{\partial f_2}\right) & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) & 0 & 0 & \cdot \\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) & 0 & \cdot \\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right) & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) & \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Diese beiden Determinanten reduciren sich auf ihre Anfangsglieder (§. 2, 7); die eine hat den Werth 1, die andere ist dem oben angegebenen Producte gleich.

3. **Lehrsatz**. Wenn die Determinante R des Systems der Functionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ identisch verschwindet, so sind die gegebenen Functionen von einander nicht unabhängig, und umgekehrt *).

Beweis. Wenn die Determinante R identisch verschwindet, so muss von dem Product (2)

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \cdot \cdot \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)$$

ein Factor identisch verschwinden. Nun sind im Allgemeinen

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right), \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right), \ldots, \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)$$

von Null verschieden, weil nach der Voraussetzung (2) in f_1 die Variable x_1, in f_2 die Variable $x_2, \ldots$ nicht fehlt. Also muss

$$\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)$$

identisch verschwinden, d. h. die letzte Function ist ohne x_n durch $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ ausdrückbar. Wenn es sich ereignet, dass in keiner der beiden letzten transformirten Functionen die Variablen x_{n-1}, x_n vorkommen, so hat man identisch

$$\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) = 0$$

d. h. jede der beiden letzten Functionen ist ohne x_{n-1}, x_n durch $f_1, f_2, \ldots, f_{n-2}$ ausdrückbar. U. s. w.

---

*) Jacobi det. funct. §. 6 und 7.

Umgekehrt, wenn die gegebenen Functionen nicht unabhängig von einander sind, sondern z. B. f_n durch $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ ohne x_n ausdrückbar ist, so verschwindet $\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)$ identisch, folglich auch R.

4. Besondere Fälle. Wenn die Functionen $f_1, \ldots, f_n$ linear sind, so ist die Functionaldeterminante von der Determinante der Coefficienten nicht verschieden (§. 8). Bei dem Verschwinden dieser Determinante sind die Functionen durch eine Gleichung von der Form

$$\alpha_{1i} f_1 + \alpha_{2i} f_2 + \ldots + \alpha_{ni} f_n = 0$$

unter einander verbunden.

Wenn die Functionen $f_1, \ldots, f_n$ die partialen Differentialquotienten einer gegebenen Function F sind, so ist die Functionaldeterminante gleichbedeutend mit der von Hesse (Crelle J. 28 p. 83) aus den zweiten partialen Differentialquotienten von F gebildeten Determinante, welcher Sylvester (Cambr. and Dublin math. J. 6 p. 186) den Namen »Hessian of F« gegeben hat. Diese Functionaldeterminante verschwindet, sobald $f_1, \ldots, f_n$ durch eine Gleichung verbunden sind, welche dadurch zu einer Identität wird, dass man die Differentialquotienten durch die Variablen ausdrückt (3). Sind die Differentialquotienten durch eine Gleichung von der Art

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0$$

verbunden, in welcher $c_1, \ldots, c_n$ Constanten bedeuten, so geht die Function F durch die lineare Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + c_1 y_n \\ &\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= y_{n-1} + c_{n-1} y_n \\ x_n &= c_n y_n \end{aligned}$$

in eine Function der $n-1$ Variablen $y_1, \ldots, y_{n-1}$ über, weil

$$\frac{\partial F}{\partial y_n} = f_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_n} + \ldots + f_n \frac{\partial x_n}{\partial y_n} = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n = 0 \text{ *)}.$$

Die Functionaldeterminante der Differentialquotienten $f_1, f_2, \ldots, f_n$ einer homogenen Function F von 2 Dimensionen (einer

*) Vergl. Hesse Crelle J. 42 p. 117. 56 p. 263.

quadratischen Form) ist zugleich die Discriminante der Function *). Wenn dieselbe verschwindet, so sind die linearen Functionen $f_1, \ldots, f_n$ durch eine Gleichung von der Art

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0$$

verbunden, und die Function F ist in Wahrheit eine homogene Function von 2 Dimensionen, aber von weniger als n Variablen **).

Beispiel.

$$F = x^2 + 4y^2 - 2z^2 + 2yz + xz - 5xy$$
$$f_x = 2x - 5y + z$$
$$f_y = -5x + 8y + 2z$$
$$f_z = x + 2y - 4z$$

Die Discriminante von F verschwindet, und man hat

$$2f_x + f_y + f_z = 0 .$$

Die Substitution

$$x = u + 2w , \qquad y = v + w , \qquad z = w$$

giebt

$$F = u^2 - 5uv + 4v^2 = (u - v)(u - 4v)$$
$$= (x - y - z)(x - 4y + 2z) .$$

5. Wenn U eine gegebene Function der Grössen f_1, $f_2, \ldots, f_n$, jede derselben eine gegebene Function der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist, wenn ferner R die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} f_{11} & \cdot & \cdot & f_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & \cdot & \cdot & f_{nn} \end{vmatrix}$$

bedeutet, so ist das bestimmte vielfache Integral

$$\int U\, df_1\, df_2 \ldots df_n = \int U R\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

---

*) Vergl. §. 11, 19 ff. Mit dem Namen »Determinante einer quadratischen Form« hatte Gauss (Disq. arithm. 154 und 267) den entgegengesetzten Werth der Determinante bezeichnet, welche jetzt gewöhnlich Discriminante heisst. Nach Sylvester (Philos. Mag. 1851, II p. 406) ist die Discriminante einer homogenen Function von beliebig vielen Dimensionen eine Resultante, nämlich diejenige Function der Coefficienten, welche verschwinden muss, damit die partialen Differentialquotienten der Function zugleich verschwinden können.

**) Gauss Disq. arithm. 215 und 267.

unter der Voraussetzung, dass die Grenzen der neuen Integrationen nach den gegebenen Grenzen der ursprünglichen Integrationen gezogen werden *).

Beweis. Stellt man zunächst wie oben (2)

$$\begin{array}{lll} f_1 & \text{als Function von} & x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \\ f_2 & \ldots\ldots & f_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \\ f_3 & \ldots\ldots & f_1, f_2, x_3, \ldots, x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n & \ldots\ldots & f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, x_n \end{array}$$

vor und unterscheidet man die partialen Differentialquotienten der transformirten Functionen durch beigefügte Klammern, so kann man die neuen Variablen nach und nach in das gegebene Integral einführen wie folgt.

Indem man mit der Integration in Bezug auf f_n beginnt, hat man das Differential df_n durch $\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) dx_n$ zu ersetzen, um statt der Variablen f_n die Variable x_n einzuführen. Demnach ist

$$\int U\, df_1 \ldots df_n = \int U \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) df_1 \ldots df_{n-1}\, dx_n \,.$$

Wenn man die Entwickelung dieses transformirten Integrals mit der Integration in Bezug auf f_{n-1} beginnt, so hat man df_{n-1} durch $\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) dx_{n-1}$ zu ersetzen, um statt der Variablen f_{n-1} die Variable x_{n-1} einzuführen, und findet

$$\int U \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) df_1 \ldots df_{n-1}\, dx_n = \int U \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) df_1 \ldots df_{n-2}\, dx_{n-1}\, dx_n \,.$$

Indem man so fortfährt, erhält man endlich

$$\int U\, df_1 \ldots df_n = \int U \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) \ldots \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) dx_1 \ldots dx_n \,.$$

*) Die Transformation eines zweifachen Integrals ist zuerst von EULER 1759 Nov. Comm. Petrop. 14, I p. 72 gezeigt worden. Bald darauf hat LAGRANGE Mém. de l'Acad. de Berlin 1773 p. 125 die Transformation eines dreifachen Integrals nach einer allgemein anwendbaren Methode ausgeführt. Der allgemeine Ausdruck des transformirten vielfachen Integrals rührt von JACOBI her (Crelle J. 12 p. 38, det. funct. §. 19). Denselben Ausdruck hat auch CATALAN gefunden. Mém. cour. p. l'acad. de Bruxelles t. 14 (1840). Vergl. Bull. de l'acad. de Belgique t. 13, 6.

Das Product der künstlichen die obigen Transformationen voraussetzenden Differentialquotienten ist aber die Functionaldeterminante von $f_1, f_2, .., f_n$ (2).

6. Zu derselben Regel gelangt man unmittelbar durch Verfolgung des Weges, den Lagrange (l. c.) bei der Transformation eines dreifachen Integrals eingeschlagen hat *).

Wenn $f_1, f_2, .., f_n$ Functionen der Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ sind, so besteht das System von linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} df_1 &= f_{11}\,dx_1 + f_{12}\,dx_2 + \,.\,.\, + f_{1n}\,dx_n \\ &\quad . \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad . \\ df_n &= f_{n1}\,dx_1 + f_{n2}\,dx_2 + \,.\,.\, + f_{nn}\,dx_n\,. \end{aligned}$$

Durch Auflösung desselben erhält man (§. 8, 1)

$$\varphi_{1k}\,df_1 + \varphi_{2k}\,df_2 + \,.\,.\, + \varphi_{nk}\,df_n = R_n\,dx_k\,,$$

wenn

$$R_n = \begin{vmatrix} f_{11} & . & . & f_{1n} \\ . & . & . & . \\ f_{n1} & . & . & f_{nn} \end{vmatrix}$$

und φ_{ik} den Coefficienten von f_{ik} d. i. $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ in R_n bedeutet, so dass insbesondere $\varphi_{nn} = R_{n-1}$ ist (§. 3, 1). Es sei nun

$$\int U\,df_1\,df_2\,\,.\,.\,\,df_n$$

das zu bildende vielfache Integral und U eine gegebene Function von $f_1, f_2, .., f_n$.

Wenn man die Reihe der auszuführenden Integrationen mit der Integration in Bezug auf f_n eröffnet, so hat man die Summe der Differentiale $U\,df_n$ unter der Bedingung zu suchen, dass $f_1, f_2, .., f_{n-1}$ unverändert bleiben. Unter dieser Bedingung ist in dem obigen System von linearen Gleichungen

$$df_1 = 0\,,\;\; df_2 = 0\,, \,.\,.\,,\; df_{n-1} = 0\,,$$

folglich

$$R_{n-1}\,df_n = R_n\,dx_n\,,$$

so dass man df_n durch $\frac{R_n}{R_{n-1}}\,dx_n$ ersetzen kann. Folglich ist

*) Catalan l. c. Vergl. Moigno Leçons II p. 223.

$$\int U\,df_1\,..\,df_n = \int U\frac{R_n}{R_{n-1}}\,df_1\,..\,df_{n-1}\,dx_n\,,$$

wenn die Grenzen von x_n nach den gegebenen Grenzen von f_n bestimmt werden. Indem man die Entwickelung des so transformirten Integrals mit der Integration in Bezug auf die Variable f_{n-1} beginnt, hat man die Summe der Differentiale $U\frac{R_n}{R_{n-1}}\,df_{n-1}$ zu suchen, während $f_1, f_2, .., f_{n-2}, x_n$ unverändert bleiben. Unter dieser Voraussetzung hat man aber

$$df_1 = 0\,, \ldots, df_{n-2} = 0\,,\ dx_n = 0\,,$$

mithin folgendes System von $n-1$ linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= f_{11}\,dx_1 + \ldots + f_{1,n-1}\,dx_{n-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\\
0 &= f_{n-2,1}\,dx_1 + \ldots + f_{n-2,n-1}\,dx_{n-1}\\
df_{n-1} &= f_{n-1,1}\,dx_1 + \ldots + f_{n-1,n-1}\,dx_{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich wie oben

$$R_{n-2}\,df_{n-1} = R_{n-1}\,dx_{n-1}\,,$$

so dass man df_{n-1} durch $\frac{R_{n-1}}{R_{n-2}}\,dx_{n-1}$ und $U\frac{R_n}{R_{n-1}}\,df_{n-1}$ durch $U\frac{R_n}{R_{n-2}}\,dx_{n-1}$ ersetzen kann. Daher ist bei der erforderlichen Begrenzung

$$\int U\frac{R_n}{R_{n-1}}\,df_1\,..\,df_{n-1}\,dx_n = \int U\frac{R_n}{R_{n-2}}\,df_1\,..\,df_{n-2}\,dx_{n-1}\,dx_n\,.$$

Der gefundene Ausdruck für das gesuchte vielfache Integral lässt sich durch analoge Betrachtungen transformiren, indem man zufolge eines Systems von $n-2$ linearen Gleichungen df_{n-2} durch $\frac{R_{n-2}}{R_{n-3}}\,dx_{n-2}$ ersetzt, wodurch

$$\begin{aligned}
&\int U\frac{R_n}{R_{n-2}}\,df_1\,..\,df_{n-2}\,dx_{n-1}\,dx_n\\
&= \int U\frac{R_n}{R_{n-3}}\,df_1\,..\,df_{n-3}\,dx_{n-2}\,dx_{n-1}\,dx_n
\end{aligned}$$

wird u. s. w. Endlich findet man auf demselben Wege

$$\int U\frac{R_n}{R_1}\,df_1\,dx_2\,..\,dx_n = \int U R_n\,dx_1\,dx_2\,..\,dx_n\,,$$

indem man zuerst in Bezug auf f_1 integrirend vermöge der Bedingungen

$$dx_2 = 0\,,\quad dx_3 = 0\,,\,..\,,\quad dx_n = 0$$

das Differential df_1 durch $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,dx_1$ d. i. $R_1\,dx_1$ ersetzt.

7. Wenn $f_1, f_2, .., f_n$ nicht unmittelbar als Functionen von $x_1, x_2, .., x_n$, sondern zunächst als Functionen der p Grössen $y_1, y_2, .., y_p$ gegeben sind, welche gegebene Functionen der Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ sind, so findet man ihre Functionaldeterminante wie folgt *). Nach Voraussetzung ist

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k} + .. + \frac{\partial f_i}{\partial y_p}\frac{\partial y_p}{\partial x_k},$$

also

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + .. + a_{ip}b_{pk}\,,$$

wenn

$$c_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\,,\qquad a_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial y_k}\,,\qquad b_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\,.$$

Bezeichnet man die Determinanten der Elemente a, b durch P, Q und die gesuchte Determinante der Elemente c durch R, so ist nach §. 5, 1, wenn $p < n$,

$$R = 0\,,$$

d. h. wenn die gegebenen Functionen durch eine kleinere Anzahl von Functionen der Variablen ausgedrückt werden können, so verschwindet die Functionaldeterminante identisch, wie es nach dem Lehrsatz (3) zu erwarten war.

Wenn $p = n$, so ist $R = PQ$, d. h.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & .\,. & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . & .\,. & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & .\,. & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & .\,. & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ . & .\,. & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & .\,. & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & .\,. & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ . & .\,. & . \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & .\,. & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Wenn $p > n$, so ist $R = \Sigma PQ$, d. h.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & .\,. & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . & .\,. & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & .\,. & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_r} & \frac{\partial f_1}{\partial y_s} & . \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_r} & \frac{\partial f_2}{\partial y_s} & . \\ . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_r}{\partial x_1} & \frac{\partial y_r}{\partial x_2} & . \\ \frac{\partial y_s}{\partial x_1} & \frac{\partial y_s}{\partial x_2} & . \\ . & . & \end{vmatrix}.$$

*) Jacobi det. funct. §. 11.

Die Glieder dieser Summe werden gebildet, indem man für $r, s, \ldots$ alle Combinationen von je n verschiedenen Numern aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ setzt.

8. Wenn $f_1, f_2, \ldots, f_n$ nicht explicite als Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben sind, sondern implicite dadurch, dass n Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ der Variablen $f_1, f_2, \ldots, f_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschwinden, so ist *)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_n} \end{vmatrix} .$$

Beweis. Vermöge der gegebenen Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \quad \varphi_n = 0$$

kann jede der Grössen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ durch die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ausgedrückt werden. Wenn man die gefundenen Werthe in φ_i substituirt, so erhält man die Identität $\varphi_i = 0$. Aus derselben folgt durch Differentiation in Bezug auf x_k die Identität

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_k} = 0,$$

d. i.

$$c_{ik} = b_{i1} a_{1k} + \ldots + b_{in} a_{nk},$$

wenn

$$c_{ik} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}, \quad b_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_k}, \quad a_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

gesetzt wird. Bezeichnet man die Determinanten der Elemente c, b, a durch T, S, R, so ist (§. 5, 1)

$$T = SR, \quad R = T : S$$

und zwar (§. 3, 4)

$$T = (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} .$$

*) Jacobi det. funct. §. 10.

9. Wenn $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dadurch als Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben sind, dass $n+p$ Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+p}$ der Variablen $f_1, f_2, \ldots, f_{n+p}, x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschwinden, so ist *) $\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_{n+1}} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_{n+p}} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_{n+p}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_{n+p}}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_{n+p}}{\partial f_{n+1}} & \ldots & \frac{\partial \varphi_{n+p}}{\partial f_{n+p}} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_{n+p}} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_{n+p}}{\partial f_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_{n+p}}{\partial f_{n+p}} \end{vmatrix}.$$

Beweis. Vermöge der Gleichungen

$$\varphi_{n+1} = 0, \quad \varphi_{n+2} = 0, \ldots, \varphi_{n+p} = 0$$

können $f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots, f_{n+p}$ durch die übrigen Grössen ausgedrückt werden, folglich sind vermöge der Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$$

die Grössen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ durch $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ausdrückbar. Daher hat man (8) für $i = 1, 2, \ldots, n+p$, solange k nicht grösser als n,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_k} = 0,$$

d. i.

$$c_{ik} = b_{i1} a_{1k} + \ldots + b_{in} a_{nk},$$

wenn

$$c_{ik} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}, \qquad b_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_k}, \qquad a_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

gesetzt wird. Wenn dagegen k grösser als n, so setze man

$$c_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_k} = b_{ik}.$$

Bezeichnet man nun die Determinanten $(n+p)$ten Grades der Elemente c und b und die Determinante $n$ten Grades der Elemente a der Reihe nach durch T, S, R, so ist (§. 5, 5)

$$T = SR, \quad R = T : S.$$

*) Jacobi det. funct. §. 13.

Insbesondere ist

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_2} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_2} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_n} \end{vmatrix}.$$

10. Wenn $f_1, f_2, \ldots, f_n$ von einander unabhängige Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind, so sind auch $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von einander unabhängige Functionen von $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Die Determinante des Systems $f_1, f_2, \ldots, f_n$ und die Determinante des Systems $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind reciprok, d. h. ihr Product ist $= 1$ *).

Beweis. Um f_i in Bezug auf f_k zu differentiiren, müsste man $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ausdrücken und

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial f_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial f_k} + \cdot\,\cdot + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial f_k}$$

bilden. Diese Summe beträgt aber 0 oder 1, je nachdem k von i verschieden ist oder nicht, weil $f_1, f_2, \ldots, f_n$ von einander unabhängig sind.

Bezeichnet man $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ durch a_{ik}, $\frac{\partial x_i}{\partial f_k}$ durch b_{ik} und die erwähnte Summe durch c_{ik}, bezeichnet man die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\,\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\,\cdot & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot\,\cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot\,\cdot & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\,\cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot\,\cdot & c_{nn} \end{vmatrix}$$

durch R, S, T, so ist

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \cdot\,\cdot + a_{in}b_{nk},$$

folglich (§. 5, 1) $T = RS$. Nun ist c_{ik} entweder 0 oder 1, je nachdem k von i verschieden ist oder nicht; folglich $T = 1$ (§. 2, 7), d. h.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial f_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial x_1}{\partial f_n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial f_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial x_n}{\partial f_n} \end{vmatrix} = 1.$$

*) Jacobi det. funct. §. 8. Vergl. Möbius Crelle J. 12 p. 116.

11. Wenn R und S die vorige Bedeutung haben und die Coefficienten von $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ in R und von $\frac{\partial x_i}{\partial f_k}$ in S durch α_{ik} und β_{ik} bezeichnet werden, so ist *)

$$R \frac{\partial x_i}{\partial f_k} = \alpha_{ki}, \qquad S \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \beta_{ki},$$

$$R \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial f_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial x_1}{\partial f_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_m}{\partial f_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial x_m}{\partial f_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{m+1}} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

$$S \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{m+1}}{\partial f_{m+1}} & \cdot & \cdot & \frac{\partial x_{m+1}}{\partial f_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial f_{m+1}} & \cdot & \cdot & \frac{\partial x_n}{\partial f_n} \end{vmatrix}.$$

Beweis. Nach den angenommenen Bezeichnungen (10) ist

$$\begin{array}{l} a_{11} b_{1k} + a_{12} b_{2k} + \cdot \cdot + a_{1n} b_{nk} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{k1} b_{1k} + a_{k2} b_{2k} + \cdot \cdot + a_{kn} b_{nk} = 1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} b_{1k} + a_{n2} b_{2k} + \cdot \cdot + a_{nn} b_{nk} = 0. \end{array}$$

Wenn man diese Identitäten der Reihe nach mit

$$\alpha_{1i}, \quad \alpha_{2i}, \quad \cdot \cdot, \quad \alpha_{ni}$$

multiplicirt und dann addirt, so erhält man (§. 3, 3)

$$R b_{ik} = \alpha_{ki}.$$

Ferner ist (§. 7, 2)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \alpha_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \cdot & \cdot & \alpha_{mm} \end{vmatrix} = R^{m-1} \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdot & \cdot & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,m+1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Durch Substitution der eben gefundenen Werthe von $\alpha_{11}, \cdot \cdot, \alpha_{mm}$ erhält man auf der linken Seite (§. 3, 4)

$$R^m \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & b_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \cdot & \cdot & b_{mm} \end{vmatrix},$$

*) Jacobi det. funct. §. 8 und 9.

und damit den Inhalt der zweiten Behauptung. Die übrigen Behauptungen folgen aus den bewiesenen, indem man gleichzeitig f mit x, R mit S vertauscht.

12. Wenn t eine Grösse bedeutet, von welcher $f_1, f_2, \ldots, f_n$ auf gegebene Weise abhängen, so kann man die Differentialquotienten

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f_n}{\partial t},$$

welche zunächst Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind, von den Variablen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ abhängig machen, um sie in Bezug auf diese Variablen zu differentiiren. Die Functionaldeterminante R (10 und 11), welche zunächst eine Function von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist, kann ebenfalls durch $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ausgedrückt und dann nach t differentiirt werden. Wenn andererseits u eine Variable bedeutet, von welcher $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf gegebene Weise abhängen u. s. w., so ist nach den angenommenen Bezeichnungen *)

$$\frac{\partial}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial t} = \frac{\partial \log R}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial f_1}\left(S\frac{\partial f_1}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial f_2}\left(S\frac{\partial f_2}{\partial t}\right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial f_n}\left(S\frac{\partial f_n}{\partial t}\right) = 0$$

und analog

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u} = \frac{\partial \log S}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(R\frac{\partial x_1}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(R\frac{\partial x_2}{\partial u}\right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(R\frac{\partial x_n}{\partial u}\right) = 0.$$

Insbesondere ist **)

$$\frac{\partial \beta_{k1}}{\partial f_1} + \frac{\partial \beta_{k2}}{\partial f_2} + \ldots + \frac{\partial \beta_{kn}}{\partial f_n} = 0$$

$$\frac{\partial \alpha_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{k2}}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \alpha_{kn}}{\partial x_n} = 0.$$

Beweis. Nach §. 3, 15 hat man

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \sum_{i,k} \alpha_{ik}\frac{\partial a_{ik}}{\partial t},$$

---

*) Jacobi det. funct. §. 9. Vergl. Jacobi Crelle J. 27 p. 209.

**) Jacobi Crelle J. 27 p. 203.

worin nach (11)

$$a_{ik} = R \frac{\partial x_k}{\partial f_i}, \qquad \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x_k}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f_i} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f_i} + \ldots + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial f_i} = \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t},$$

folglich

$$\frac{\partial R}{\partial t} = R \sum_i \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \log R}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t}.$$

Ferner ist $RS = 1$ (10), also $\log R + \log S = 0$, und

$$0 = \frac{\partial \log S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t}.$$

Da die Functionaldeterminante S eine Function der Grössen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ist, welche die Variable t enthalten, so hat man

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial S}{\partial f_n} \frac{\partial f_n}{\partial t}.$$

Nimmt man hinzu, dass

$$\frac{\partial S}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t} + S \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial f_i} \left(S \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)$$

ist, so erhält man die zweite der aufgestellten Identitäten. Die analogen Identitäten ergeben sich durch gleichzeitige Vertauschung von t mit u, f mit x, R mit S.

Wenn insbesondere $t = x_k$, so ist (11)

$$S \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \beta_{ki} \text{ u. s. w.}$$

13. Wenn $X, X_1, \ldots, X_n$ gegebene Functionen von $x, x_1, \ldots, x_n$ bedeuten, f eine unbestimmte Function derselben Variablen und

$$\psi(f) = X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

ist; wenn ferner n von einander unabhängige Lösungen der linearen partialen Differentialgleichung $\psi(f) = 0$ durch $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bezeichnet werden, so dass $\psi(f_1), \psi(f_2), \ldots, \psi(f_n)$ identisch verschwinden: so lässt sich ein Multiplicator M angeben, durch

welchen $\psi(f)$ zur Determinante der Functionen $f, f_1, \ldots, f_n$ wird. Es ist nämlich

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = A\frac{\partial f}{\partial x} + A_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + A_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

folglich $M\psi(f) = R$, wenn $M = A_i : X_i$. In der That verschwinden R und $\psi(f)$, wenn für f eine der Functionen $f_1, f_2, \ldots$ gesetzt wird. Zufolge der in (12) bewiesenen Eigenschaft der Coefficienten $A, A_1, \ldots A_n$ ist der Multiplicator M eine Lösung der linearen partialen Differentialgleichung

$$\frac{\partial(uX)}{\partial x} + \frac{\partial(uX_1)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial(uX_n)}{\partial x_n} = 0\ ^{*)}.$$

Anmerkung. Die durch M bezeichnete Function der Grössen $x, x_1, \ldots, x_n$ wird nach Jacobi (l. c.) der Multiplicator der partialen Differentialgleichung $\psi(f) = 0$, oder der partialen Differentialgleichung

$$0 = X - X_1\frac{\partial x}{\partial x_1} - \ldots - X_n\frac{\partial x}{\partial x_n},$$

oder des Systems von gemeinen Differentialgleichungen

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n$$

genannt, weil die Auflösungen jener partialen Differentialgleichungen und dieses Systems gemeiner Differentialgleichungen im engsten Zusammenhange stehen. Ist nämlich π eine Lösung der Gleichung $\psi(f) = 0$ und x dadurch von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abhängig gemacht, dass man π einer willkürlichen Constante gleichgesetzt hat, so hat man

$$0 = X\frac{\partial\pi}{\partial x} + X_1\frac{\partial\pi}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial\pi}{\partial x_n},$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial x_i} + \frac{\partial\pi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial x} : \frac{\partial\pi}{\partial x_1} : \frac{\partial\pi}{\partial x_2} : \ldots = 1 : -\frac{\partial x}{\partial x_1} : -\frac{\partial x}{\partial x_2} : \ldots,$$

*) Jacobi Crelle J. 27 p. 210.

$$0 = X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - \dots - X_n \frac{\partial r}{\partial x_n} .$$

Sind andrerseits $f_1, f_2 \dots, f_n$ von einander unabhängige Lösungen der Gleichung $\psi(f) = 0$ und willkürlichen Constanten gleichgesetzt, so hat man

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} dx + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n = 0$$

und durch Auflösung dieses linearen Systems

$$dx : dx_1 : dx_2 : \dots = A : A_1 : A_2 : \dots$$
$$= X : X_1 : X_2 : \dots$$

§. 13. Lehrsätze von den homogenen Functionen.

1. Wenn u eine homogene Function $m$ten Grades der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ von m Dimensionen ist, wenn man $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ durch u_i bezeichnet, so ist identisch nach Euler's Theorem *)

$$mu = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n .$$

Indem man denselben Satz auf die homogenen Functionen $u_1, u_2, \dots$ von $m - 1$ Dimensionen anwendet und $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ durch u_{ik} bezeichnet, erhält man das System von Identitäten **)

$$(m-1) u_1 = u_{11} x_1 + \dots + u_{n1} x_n$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$(m-1) u_n = u_{1n} x_1 + \dots + u_{nn} x_n .$$

2. Nach den angenommenen Bezeichnungen ist

$$m(m-1) u = \sum_{i,k} x_i x_k u_{ik}$$

worin für i und k alle Zahlen von 1 bis n zu setzen sind ***). Wenn man nämlich die obigen Identitäten der Reihe nach mit

---

*) Mechanica 1736 tom. II, §. 106. 497. Calc. diff. §. 225.

**) Hesse Crelle J. 28 p. 78.

***) Lacroix Calc. diff. §. 91.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ multiplicirt und addirt, so findet man auf der rechten Seite die angegebene Summe, weil $u_{ik} = u_{ki}$, und auf der linken Seite $m(m-1)u$ nach (1).

Diese und andere Zerlegungen der homogenen Function ergeben sich, wenn man (Serret Algèbre supér. Note XII) die Identität

$$f(x_1 + \omega x_1, x_2 + \omega x_2, \ldots, x_n + \omega x_n) = (1+\omega)^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

in Bezug auf ω nach Taylor's Theorem entwickelt, oder (Hesse anal. Geom. des Raumes 8te Vorl.) 1mal, 2mal, .. in Bezug auf ω differentiirt und nach der Differentiation $\omega = 0$ setzt.

3. In Folge der in (1) gegebenen Identitäten ist (§. 8)

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{m-1}u & u_1 & \cdot & \cdot & u_n \\ u_1 & u_{11} & \cdot & \cdot & u_{n1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ u_n & u_{1n} & \cdot & \cdot & u_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

nach Weglassung des Factor $m-1$ in der ersten Colonne (§. 3, 4). Die verschwindende Determinante $(n+1)$ten Grades kann nach §. 3, 5 als Summe der Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{m-1}u & u_1 & \cdot & \cdot & u_n \\ 0 & u_{11} & \cdot & \cdot & u_{n1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & u_{1n} & \cdot & \cdot & u_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & u_1 & \cdot & \cdot & u_n \\ u_1 & u_{11} & \cdot & \cdot & u_{n1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ u_n & u_{1n} & \cdot & \cdot & u_{nn} \end{vmatrix}$$

betrachtet werden. Die erste dieser Determinanten reducirt sich nach §. 2, 5 auf

$$\frac{m}{m-1}u \begin{vmatrix} u_{11} & \cdot & \cdot & u_{n1} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ u_{1n} & \cdot & \cdot & u_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die zweite Determinante lässt sich nach §. 3, 17 entwickeln, weil $u_{ik} = u_{ki}$. Setzt man nämlich $r = \Sigma \pm u_{11} \ldots u_{nn}$ und bezeichnet den Coefficienten von u_{ik} in r durch α_{ik}, so dass $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ (§. 3, 13), so ist

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & \cdot & \cdot & u_n \\ u_1 & u_{11} & \cdot & \cdot & u_{n1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ u_n & u_{1n} & \cdot & \cdot & u_{nn} \end{vmatrix} = -\sum_{i,k} u_i u_k \alpha_{ik}.$$

Folglich lautet die obige Identität *)

$$\frac{m}{m-1} u v - \sum_{i,k} u_i u_k \alpha_{ik} = 0 .$$

4. Aus dem System (1)

$$\begin{aligned}
-(m-1)\frac{mu}{m-1} &+ u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n = 0\\
-(m-1) u_1 &+ u_{11} x_1 + \ldots + u_{n1} x_n = 0\\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots\\
-(m-1) u_n &+ u_{1n} x_1 + \ldots + u_{nn} x_n = 0
\end{aligned}$$

folgt nach §. 8, 2 die Proportion

$$-(m-1) : x_1 : x_2 : \ldots = \beta_i : \beta_{1i} : \beta_{2i} : \ldots ,$$

wenn die Coefficienten der Elemente $\frac{mu}{m-1}$, u_i, u_{ik} in der verschwindenden Determinante $(n+1)$ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} \frac{mu}{m-1} & u_1 & \ldots & u_n \\ u_1 & u_{11} & \ldots & u_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n & u_{1n} & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

der Reihe nach durch v, β_i, β_{ik} bezeichnet werden. Nun ist $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ (§. 3, 13), folglich auch $\beta_i^2 = v\beta_{ii}$ (§. 6, 5), und daher

$$-\frac{x_i}{m-1} = \frac{\beta_{ii}}{\beta_i} = \frac{\beta_i}{v} ,$$

$$\frac{x_i x_k}{(m-1)^2} = \frac{\beta_{ii}\beta_{ik}}{\beta_i^2} = \frac{\beta_{ik}}{v} \text{ **)} .$$

Wenn daher irgend eine partiale Determinante $n$ten Grades der identisch verschwindenden Determinante R, namentlich die Determinante v, identisch verschwindet, so verschwinden auch die übrigen partialen Determinanten desselben Grades.

5. Die bewiesenen Relationen leisten einen wichtigen Dienst in der Theorie der Krümmung von Linien und Flächen. Wenn f eine Function der orthogonalen Coordinaten x, y eines

---

*) Hesse Crelle J. 38 p. 242.

**) Hiermit stimmen die von Hesse (Crelle J. 28 p. 103 und 38 p. 242) gegebenen Relationen überein.

Punktes ist, also $f = 0$ die Gleichung der Linie ist, auf welcher der Punkt (x, y) liegt; wenn ferner

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} = f_{21}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$$

gesetzt wird, so ist bekanntlich

$$x - \xi : y - \eta = f_1 : f_2$$

die Gleichung für die Normale der Linie $(f = 0)$ durch den Punkt (x, y) derselben, wobei ξ, η die Coordinaten irgend eines Punktes der Normale bedeuten. Setzt man

$$\lambda(x - \xi) = f_1, \quad \lambda(y - \eta) = f_2,$$

und differentiirt diese Gleichungen, so erhält man

$$f_1 dx + f_2 dy = 0,$$

$$(x - \xi)\, d\lambda + \lambda dx = df_1, \quad (y - \eta)\, d\lambda + \lambda dy = df_2,$$

oder

$$f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_1 - \lambda dx, \quad f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_2 - \lambda dy$$

für die Normale der Linie $(f = 0)$ durch den Punkt $(x + dx, y + dy)$, welche mit der ersten Normale den Punkt (ξ, η) gemein hat, d. i. das Centrum der Krümmung, welche die Linie $(f = 0)$ im Punkte (x, y) hat. Aus dem System

$$\begin{aligned} 0 &= f_1\, dx + f_2\, dy \\ f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} &= (f_{11} - \lambda)\, dx + f_{12}\, dy \\ f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{21}\, dx + (f_{22} - \lambda)\, dy \end{aligned}$$

folgt (§. 8)

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} - \lambda & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

zur Bestimmung von λ. Wenn man diese Gleichung nach §. 3, 17 entwickelt, so erhält λ den Coefficienten $f_1^2 + f_2^2$ und das von λ unabhängige Glied ist

$$L = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}$$

Daher ist

$$\lambda = \frac{-L}{f_1^2 + f_2^2}.$$

Endlich hat man zur Berechnung des Radius der Krümmung, der durch ϱ bezeichnet wird,

$$\varrho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \frac{f_1^2 + f_2^2}{\lambda^2}$$

und zur Berechnung der Krümmung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{-L}{(f_1^2 + f_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Determinante L ist leichter zu behandeln, wenn die Function, auf welche sie sich bezieht, homogen ist. Versteht man unter u die homogene Function der Variablen x_1, x_2, x_3, welche mit f identisch wird, wenn $x_3 = 1$, so hat man (4)

$$L = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = \frac{v}{(m-1)^2},$$

worin $v = \Sigma \pm u_{11} u_{22} u_{33}$ und nach der Differentiation $x_3 = 1$ zu setzen ist.

Die Punkte der Linie ($f = 0$ oder $u = 0$), für welche L oder v verschwindet, mithin die Krümmung verschwindet, sind im Allgemeinen Wendepunkte der Linie. Sie erscheinen als Durchschnitte der Linie ($f = 0$ oder $u = 0$) und der Linie ($L = 0$ oder $v = 0$). Nun sind f und u nach Voraussetzung $m$ten Grades, v aber $3(m-2)$ten Grades, folglich haben die gedachten Linien im Allgemeinen $3m(m-2)$ Durchschnitte, d. h. eine Linie $m$ten Grades hat im Allgemeinen $3m(m-2)$ Wendepunkte*).

6. Wenn f eine Function der orthogonalen Coordinaten x, y, z eines Punktes, also $f = 0$ die Gleichung der Fläche ist,

*) Dieser Satz ist zuerst von Plücker (Syst. der analyt. Geom. p. 264) aufgestellt worden. Der hier mitgetheilte Beweis rührt von Hesse (l. c.) her. Einen andern Beweis findet man bei Jacobi (Crelle J. 40 p. 254).

auf welcher der Punkt (x, y, z) liegt, so ist nach den vorigen Bezeichnungen

$$x - \xi : y - \eta : z - \zeta = f_1 : f_2 : f_3$$

die Gleichung für die Normale der Fläche $(f = 0)$ durch den Punkt (x, y, z), wofür

$$\lambda(x - \xi) = f_1, \quad \lambda(y - \eta) = f_2, \quad \lambda(z - \zeta) = f_3$$

gesetzt werden kann. Die Normalen der Fläche $(f = 0)$ durch die Punkte (x, y, z) und $(x + dx, y + dy, z + dz)$ schneiden sich im Allgemeinen nicht, sondern nur dann, wenn der zuletzt genannte Punkt auf einer durch (x, y, z) gehenden Krümmungslinie liegt*). Ihr Durchschnitt (ξ, η, ζ) ist das Krümmungscentrum eines Hauptschnitts der Fläche für den Punkt (x, y, z). Durch Differentiation der obigen Gleichungen findet man für diesen Fall

$$(x - \xi)\, d\lambda + \lambda\, dx = df_1, \quad \text{u. s. w.}$$

oder

$$f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_1 - \lambda\, dx$$

$$f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_2 - \lambda\, dy$$

$$f_3 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_3 - \lambda\, dz\,.$$

Folglich (§. 8) ist

$$\begin{vmatrix} f_1 & df_1 & dx \\ f_2 & df_2 & dy \\ f_3 & df_3 & dz \end{vmatrix} = 0$$

die Differentialgleichung, welche in Verbindung mit der Differentialgleichung der gegebenen Fläche

$$f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz = 0$$

die durch den Punkt (x, y, z) gehenden Krümmungslinien bestimmt. Aus dem System der Gleichungen

---

*) Bei genauer Infinitesimalbetrachtung findet man (Schläfli's briefl. Mittheilung), dass in diesem Falle der Abstand der Normalen ein Unendlichkleines 3ter Ordnung ist, während der Abstand der Fusspunkte zu den Unendlichkleinen 1ter Ordnung gehört.

$$\begin{aligned}
0 &= f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz \\
f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} &= (f_{11} - \lambda)\, dx + f_{12}\, dy + f_{13}\, dz \\
f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{12}\, dx + (f_{22} - \lambda)\, dy + f_{23}\, dz \\
f_3 \frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{13}\, dx + f_{23}\, dy + (f_{33} - \lambda)\, dz
\end{aligned}$$

folgt zur Bestimmung von λ

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} - \lambda & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} - \lambda & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Diese Gleichung ist zweiten Grades, und zwar hat λ^2 den Coefficienten $-f_1^2 - f_2^2 - f_3^2$, während das von λ unabhängige Glied

$$L = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}$$

ist. Bezeichnet man die Wurzeln derselben Gleichung durch λ', λ'', so hat man

$$\lambda' \lambda'' = \frac{-L}{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} .$$

Wenn man endlich den Abstand des Punktes (ξ, η, ζ) von (x, y, z) durch ϱ bezeichnet, so ist

$$\varrho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

$$\lambda \varrho = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} .$$

Demnach hat auch ϱ zwei Werthe ϱ', ϱ'', so dass

$$\lambda' \lambda'' \varrho' \varrho'' = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 .$$

Die reciproken Werthe von ϱ' und ϱ'' sind aber die Krümmungen der durch (x, y, z) gehenden Krümmungslinien und der von ihnen berührten Hauptschnitte der Fläche, also ist das Product der Hauptkrümmungen der Fläche $(f = 0)$ in dem Punkte (x, y, z)

$$\frac{1}{\varrho' \varrho''} = - \frac{L}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^2} .$$

Versteht man unter u die homogene Function der Variablen x_1, x_2, x_3, x_4, welche mit f identisch wird, wenn $x_4 = 1$ ist, so hat man (4)

$$L = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_3 & u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix} = \frac{v}{(m-1)^2}\,.$$

Die Punkte der Fläche ($f = 0$ oder $u = 0$), für welche L oder v verschwindet, sind im Allgemeinen Wendepunkte von Hauptschnitten der Fläche. Sie liegen auf dem Durchschnitt der Flächen ($f = 0$ oder $u = 0$) und ($L = 0$ oder $v = 0$). Nun sind f und u nach Voraussetzung $m$ten Grades, v aber $4(m-2)$-ten Grades, also liegt die Wendelinie einer Fläche $m$ten Grades zugleich auf einer bestimmten Fläche $4(m-2)$ten Grades*).

7. Aus den in (1) gegebenen Identitäten hat Jacobi**), veranlasst durch einen von Hesse mitgetheilten Satz, folgendes die mehr erwähnte Determinante

$$v = \Sigma \pm u_{11} \,.\,.\, u_{nn}$$

betreffende System von Identitäten entwickelt. Zunächst ist wie §. 8

$$\text{I} \qquad v x_i = (m-1)(\alpha_{1i} u_1 + \,.\,.\, + \alpha_{ni} u_n)\,,$$

wenn $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ wie oben (3) den Coefficienten von $u_{ik} = u_{ki}$ in v bedeutet. Indem man diese Identität in Bezug auf x_i oder x_k differentiirt und zur Abkürzung

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} = v_k$$

setzt, erhält man

$$\text{II} \qquad v_i x_i = (m-1)\left(\frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_i} u_1 + \,.\,.\, + \frac{\partial \alpha_{ni}}{\partial x_i} u_n\right) + (m-2)\,v\,,$$

$$v_k x_i = (m-1)\left(\frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_k} u_1 + \,.\,.\, + \frac{\partial \alpha_{ni}}{\partial x_k} u_n\right),$$

weil (§. 3, 3)

$$\alpha_{1i} u_{1i} + \,.\,.\, + \alpha_{ni} u_{ni} = v$$
$$\alpha_{1i} u_{1k} + \,.\,.\, + \alpha_{ni} u_{nk} = 0\,.$$

*) Hesse l. c.

**) Crelle J. 40 p. 318.

Durch abermalige Differentiation der gefundenen Identitäten, wobei

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} = v_{kl}$$

gesetzt ist, erhält man

$$\text{(III)} \qquad v_{ik} x_i = (m-1)\left(\frac{\partial^2 \alpha_{1i}}{\partial x_i \partial x_k} u_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \alpha_{ni}}{\partial x_i \partial x_k} u_n\right)$$

$$- (m-1)\left(\alpha_{1i} \frac{\partial u_{1i}}{\partial x_k} + \ldots + \alpha_{ni} \frac{\partial u_{ni}}{\partial x_k}\right) + (m-1) v_k ,$$

$$v_{kl} x_i = (m-1)\left(\frac{\partial^2 \alpha_{1i}}{\partial x_k \partial x_l} u_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \alpha_{ni}}{\partial x_k \partial x_l} u_n\right)$$

$$- (m-1)\left(\alpha_{1i} \frac{\partial u_{1l}}{\partial x_k} + \ldots + \alpha_{ni} \frac{\partial u_{nl}}{\partial x_k}\right) ,$$

indem man die Differentiation der Identitäten

$$\alpha_{1i} u_{1i} + \ldots + \alpha_{ni} u_{ni} = v$$

$$\alpha_{1i} u_{1l} + \ldots + \alpha_{ni} u_{nl} = 0$$

in Bezug auf x_k zu Hülfe nimmt.

8. Ein System von Werthen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wodurch den beim Verschwinden der Discriminante von u (§. 12, 4) zulässigen Gleichungen

$$u_1 = 0 , \quad u_2 = 0 , \ldots , \quad u_n = 0$$

genügt wird, macht die Functionen u (1) und v (7, I), sowie $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (7, II) verschwinden.

Aus den Gleichungen

$$0 = u_{11} x_1 + \ldots + u_{n1} x_n$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$0 = u_{1n} x_1 + \ldots + u_{nn} x_n$$

folgt aber (§. 8, 2 und §. 6, 5), wenn α_{ik} die angegebene Bedeutung hat,

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots = \alpha_{1i} : \alpha_{2i} : \alpha_{3i} : \ldots$$

$$\frac{x_1^2}{\alpha_{11}} = \frac{x_2^2}{\alpha_{22}} = \ldots = \frac{1}{N}$$

$$N x_i x_k = \alpha_{ik} .$$

Durch diese Substitutionen erhält man in (7, III)

$$v_{ik}x_i = -(m-1)Nx_i\left(x_1\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_1} + \dots + x_n\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_n}\right),$$

d. i. nach (1)

$$v_{ik} = -(m-1)(m-2)Nu_{ik},$$

folglich

$$v_{11} : v_{12} : \dots : v_{23} : \dots = u_{11} : u_{12} : \dots : u_{23} : \dots$$

weshalb auch die Determinante $\Sigma \pm v_{11} \dots v_{nn}$ verschwindet*).

9. Die homogene Function u von m Dimensionen wird, wenn sie rational und ganz ist und ganze Coefficienten hat, eine Form $m$ten Grades (quadratisch, cubisch u. s. f.) von n unbestimmten Variablen (binär, ternär u. s. f.) genannt**). Eine quadratische Form (häufig »Form« schlechthin) kann durch

$$\sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k,$$

eine cubische Form durch

$$\sum_{i,k,l} a_{ikl}x_ix_kx_l \text{ ***)}$$

dargestellt werden, wobei i,k,l alle Werthe von 1 bis n erhalten und die Grössen a_{ik}, a_{ikl} durch Umstellung ihrer Numern keine Veränderung erleiden. Unter der Determinante einer quadratischen Form versteht man den negativen Werth der aus dem System der Coefficienten gebildeten Determinante (der Discriminante §. 12, 4). Ist also $R = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}$, so heisst $-R$ die Determinante der Form $u = \sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k$.

Wenn α_{ik} den Coefficienten von a_{ik} in R bedeutet, so heisst die quadratische Form

$$U = -\sum_{i,k} \alpha_{ik}y_iy_k$$

der Form u adjungirt †). Nach §. 6, 1 hat man

$$-\Sigma \pm (-\alpha_{11}) \dots (-\alpha_{nn}) = (-R)^{n-1},$$

d. h. die Determinante der adjungirten Form ist die $(n-1)$te Potenz der Determinante der Form.

*) Hesse Crelle J. 40 p. 316. Vergl. Jacobi l. c.

**) Gauss Disquis. arithm. art. 153 und 266.

***) Vergl. Hesse Crelle J. 28 p. 74.

†) Forma adjuncta. Gauss l. c. 267.

Die adjungirte Form U und die Form u können als Determinanten dargestellt werden. Nach §. 3, 17 hat man

$$U = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & . & . & y_n \\ y_1 & a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ y_n & a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nach derselben Entwickelungsregel ist

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & . & . & x_n \\ x_1 & \alpha_{11} & . & . & \alpha_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ x_n & \alpha_{n1} & . & . & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = -\Sigma x_i x_k A_{ik},$$

wenn A_{ik} den Coefficienten von α_{ik} in $\Sigma \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn}$ bedeutet. Nun ist $A_{ik} = R^{n-2} a_{ik}$ (§. 6, 2), folglich

$$R^{n-2} u = - \begin{vmatrix} 0 & x_1 & . & . & x_n \\ x_1 & \alpha_{11} & . & . & \alpha_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ x_n & \alpha_{n1} & . & . & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \text{*)}.$$

§. 14. Die linearen, insbesondere die orthogonalen Substitutionen.

1. Wenn eine oder mehrere Functionen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch die linearen Substitutionen

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + \ldots + b_{1n} y_n \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n &= b_{n1} y_1 + b_{n2} y_2 + \ldots + b_{nn} y_n \end{aligned}$$

in Functionen der Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ transformirt werden, so wird die Determinante der Substitutionscoefficienten

$$\Sigma \pm b_{11} \ldots b_{nn}$$

die Determinante (modulus) der linearen Substitution genannt. Dieselbe muss von Null verschieden sein, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als unabhängig von einander vorausgesetzt

*) Brioschi Det. (53).

werden (§. 12, 4). Die lineare Substitution heisst unimodular*), wenn ihre Determinante = 1 ist.

2. Wenn die linearen Functionen $f_1, f_2, .., f_n$ der Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ durch eine lineare Substitution in Functionen der Variablen $y_1, y_2, .., y_n$ transformirt werden, so ist die Determinante des Systems der transformirten Functionen (§. 12, 1) das Product der Determinante des Systems der gegebenen Functionen mit der Determinante der linearen Substitution**).

Beweis. Es seien

$$f_1 = a_{11} x_1 + .. + a_{1n} x_n$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f_n = a_{n1} x_1 + .. + a_{nn} x_n$$

die gegebenen linearen Functionen. Durch die lineare Substitution

$$x_1 = b_{11} y_1 + .. + b_{1n} y_n$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$x_n = b_{n1} y_1 + .. + b_{nn} y_n$$

erhält man die transformirten Functionen

$$f_1 = c_{11} y_1 + .. + c_{1n} y_n$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f_n = c_{n1} y_1 + .. + c_{nn} y_n ,$$

worin c_{ik} gefunden wird, indem man $x_1, x_2, .., x_n$ der Reihe nach mit $a_{i1}, a_{i2}, .., a_{in}$ multiplicirt, die Producte addirt und in der Summe den Coefficienten von y_k aufsucht:

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + .. + a_{in} b_{nk} .$$

Nach §. 5, 1 ist

$$\Sigma \pm c_{11} .. c_{nn} = \Sigma \pm a_{11} .. a_{nn} \Sigma \pm b_{11} .. b_{nn} .$$

Anmerkung. Wenn überhaupt die Functionen $f_1, .., f_n$ der Variablen $x_1, .., x_n$ durch eine lineare Substitution in Functionen der Variablen $y_1, .., y_n$ transformirt worden sind,

*) Sylvester Cambr. and Dubl. math. J. 7 p. 52. Ueber die Construction solcher Determinanten vergl. den oben (§. 3, 8) citirten Aufsatz von Hermite.

**) Vergl. den algebraischen Beweis der Multiplicationsregel (§. 5), z. B. Joachimsthal Crelle J. 40 p. 22.

so ist die Functionaldeterminante des transformirten Systems das Product der Functionaldeterminante des gegebenen Systems mit der Determinante der Substitution. Nach §. 12, 7 ist nämlich

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \cdot \frac{\partial f_n}{\partial y_n} = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \cdot \cdot \frac{\partial x_n}{\partial y_n}.$$

Nun ist $\frac{\partial x_i}{\partial y_k} = b_{ik}$, folglich u. s. w.

3. Wenn die Function f der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ durch die lineare Substitution (1) in eine Function der Variablen $y_1, \ldots, y_n$ transformirt worden ist, so ist die Determinante H' der zweiten Differentialquotienten der transformirten Function das Product derselben Determinante H der gegebenen Function mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante B *). Nach (2) hat man

$$\Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_1} \cdot \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y_n \partial y_n} = \Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial x_1} \cdot \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y_n \partial x_n} \Sigma \pm b_{11} \cdot \cdot b_{nn}$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1} \cdot \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial y_n} = \Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} \cdot \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \Sigma \pm b_{11} \cdot \cdot b_{nn}$$

folglich durch Multiplication $H' = HB^2$.

Anmerkung. Wenn die Function f eine quadratische Form (§. 13, 9) bedeutet, so ist die Functionaldeterminante H die Discriminante dieser Form. Daher wird die Discriminante der transformirten Form gefunden, indem man die Discriminante der gegebenen Form mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante multiplicirt **).

4. Unter der Resultante der homogenen ganzen Functionen

$$f(x, y) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} y + \ldots$$
$$g(x, y) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} y + \ldots$$

wird die aus den Coefficienten $a_m, a_{m-1}, \ldots, b_n, b_{n-1}, \ldots$ gebildete Formel verstanden, welche oben (§. 11, 5) als die Resultante von $f(x, 1)$ und $g(x, 1)$ angegeben worden ist. Wenn man die Functionen durch die lineare Substitution

---

*) Hesse Crelle J. 28 p. 89.

**) Diese Bemerkung ist für $n = 2$ von Lagrange (Mém. de Berlin 1773 p. 285) gemacht worden, für $n = 3$ von Gauss (Disq. arithm. 268).

$$x = \lambda u + \mu v, \qquad y = \lambda' u + \mu' v$$

transformirt hat, so findet man die auf gleiche Weise zu bildende Resultante der transformirten Functionen, indem man die Resultante der gegebenen Functionen mit der mnten Potenz der Substitutionsdeterminante $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ multiplicirt *). Stellt man die gegebenen Functionen durch die Producte

$$a_m(x - \alpha_1 y) \ldots (x - \alpha_m y) \quad \text{und} \quad b_n(x - \beta_1 y) \ldots (x - \beta_n y)$$

dar, so ist ihre Resultante

$$R = a_m^n b_n^m D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Die Differenz $\beta - \alpha$ ist die Determinante eines Paares von linearen Functionen $x - \beta y$ und $x - \alpha y$, und geht durch die angegebene Substitution in

$$(\beta - \alpha)(\lambda\mu' - \lambda'\mu)$$

über (2). Daher geht die Resultante R durch dieselbe Substitution in

$$R(\lambda\mu' - \lambda'\mu)^{mn}$$

über.

Anmerkung. Um die Discriminante der durch die angezeigte Substitution aus $f(x, y)$ entspringenden Function zu finden, hat man die Discriminante der gegebenen Function (§. 11, 19)

$$a_m^{2m-2} \Delta(\alpha, \ldots, \alpha_m)^2$$

mit der $m(m-1)$ten Potenz der Substitutionsdeterminante zu multipliciren, in Betracht dass $\Delta(\alpha_1, \ldots)^2$ das Product von $m(m-1)$ Differenzen ist.

Es giebt hiernach aus einer oder mehrern homogenen ganzen Functionen abgeleitete homogene ganze Formeln von der Eigenschaft, dass ihr Verhältniss zu den Formeln, die auf dieselbe Weise aus den durch eine lineare Substitution transformirten Functionen abgeleitet werden, eine Potenz der Substitutionsdeterminante ist, mithin den Werth 1 hat, wenn man eine lineare Substitution gebraucht, deren Determinante 1 ist. Die Formeln dieser Art hat Cayley a. a. O. unter dem Namen Hyperdeterminanten einer Function oder eines Systems

*) Dieser Satz ist in einem umfassenderen Satz Boole's enthalten, welchen Cayley Crelle J. 30 p. 1 anführt. Vergl. Jacobi Crelle J. 40 p. 245. Salmon higher plane curves p. 295.

von Functionen in umfassende Betrachtung gezogen. Man nennt die Hyperdeterminanten nach SYLVESTER (Philos. Mag. 1851, II p. 396) Covarianten oder Invarianten, je nachdem sie ausser den Coefficienten der Functionen auch die Variablen derselben enthalten oder nicht. Z. B. die Functionaldeterminante R des Systems von Functionen $f_1, \ldots, f_n$ der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist im Allgemeinen eine Covariante des Systems, weil die Functionaldeterminante des durch eine lineare Substitution, deren Determinante B ist, transformirten Systems den Werth RB hat (2). Wenn das System nur homogene lineare Functionen enthält, so ist R nur aus den Coefficienten des Systems zusammengesetzt, also eine Invariante des Systems. Die HESSE'sche Determinante H einer homogenen ganzen Function von mehr als 2 Dimensionen ist eine Covariante der Function, weil dieselbe Determinante der transformirten Function den Werth HB^2 hat (3). Die Discriminante einer homogenen ganzen Function ist eine Invariante der Function, und die Resultante von zwei binären Formen ist eine Invariante dieses Systems. Vergl. SALMON Lessons introd. to the modern higher algebra 1859 (deutsch bearb. von Fiedler 1863) und FIEDLER Elemente der neuern Geometrie und Algebra 1862. Eine fundamentale Behandlung der Invariantentheorie hat ARONHOLD (Crelle J. 62 p. 281) gegeben.

5. Unter den linearen Substitutionen, durch welche man eine gegebene Function transformiren kann, ist besonders eine solche bemerkenswerth, durch welche zugleich auch die Summe der Quadrate der Variablen in die Summe der Quadrate der neuen Variablen transformirt wird. Diese Substitution ist von EULER (Nov. Comm. Petrop. 15 p. 75, 20 p. 217), CAUCHY (Exerc. de Math. 4 p. 140), JACOBI (Crelle J. 12 p. 7), CAYLEY (Crelle J. 32 p. 119) in Betracht gezogen worden und heisst nach einer Bemerkung des Letztern eine *orthogonale Substitution*.

Wenn eine Function der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch eine lineare (orthogonale) Substitution

$$\begin{array}{l} x_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \ldots + c_{1n} y_n \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_n = c_{n1} y_1 + c_{n2} y_2 + \ldots + c_{nn} y_n \end{array}$$

in eine Function von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ zu transformiren ist, dergestalt dass

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

so haben die Coefficienten folgende Haupteigenschaften.

I. Für jedes i und k von 1 bis n ist (EULER)

$$\begin{aligned} c_{1i}^2 \quad + c_{2i}^2 \quad + \ldots + c_{ni}^2 \quad &= 1 \\ c_{1i}c_{1k} + c_{2i}c_{2k} + \ldots + c_{ni}c_{nk} &= 0 \end{aligned}$$

zufolge der Identität

$$\begin{aligned} & y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \\ &= (c_{11}y_1 + \ldots + c_{1n}y_n)^2 + \ldots + (c_{n1}y_1 + \ldots + c_{nn}y_n)^2 \\ &= y_1^2(c_{11}^2 + \ldots + c_{n1}^2) + \ldots + 2y_1y_2(c_{11}c_{12} + \ldots + c_{n1}c_{n2}) + \ldots \end{aligned}$$

II. Um die transformirte Function in die gegebene zu transformiren, hat man (CAUCHY)

$$y_i = c_{1i}x_1 + c_{2i}x_2 + \ldots + c_{ni}x_n$$

zu substituiren. Denn

$$\begin{aligned} & c_{1i}x_1 + \ldots + c_{ni}x_n \\ &= y_1(c_{1i}c_{11} + \ldots + c_{ni}c_{n1}) + \ldots + y_n(c_{1i}c_{1n} + \ldots + c_{ni}c_{nn}), \end{aligned}$$

worin der Coefficient von y_i den Werth 1 hat, während die Coefficienten der übrigen Grössen verschwinden (I).

III. Das Quadrat der Determinante einer orthogonalen Substitution ist 1 (JACOBI). Denn nach der Multiplicationsregel ist

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} d_{11} & \cdot & \cdot & d_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{n1} & \cdot & \cdot & d_{nn} \end{vmatrix},$$

wo

$$d_{ik} = c_{1i}c_{1k} + c_{2i}c_{2k} + \ldots + c_{ni}c_{nk}.$$

Nun ist $d_{ik} = 0$, $d_{ii} = 1$ (I), folglich reducirt sich die gesuchte Determinante auf ihr Anfangsglied $d_{11}d_{22}\ldots d_{nn} = 1$ (§. 2, 7).

IV. Wenn die Determinante der orthogonalen Substitution durch ε, der Coefficient von c_{ik} in ε durch γ_{ik} bezeichnet wird, so ist (JACOBI)

$$\gamma_{ik} = \varepsilon c_{ik}.$$

Um diese Identität zu finden, multiplicirt man der Reihe nach die Identitäten

$$c_{11}c_{1k} + \cdot\cdot + c_{n1}c_{nk} = 0$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$c_{1k}c_{1k} + \cdot\cdot + c_{nk}c_{nk} = 1$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$c_{1n}c_{1k} + \cdot\cdot + c_{nn}c_{nk} = 0$$

mit $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \cdot\cdot, \gamma_{in}$. Durch Summirung erhält man

$$c_{1k}(c_{11}\gamma_{i1} + \cdot\cdot + c_{1n}\gamma_{in}) + \cdot\cdot + c_{ik}(c_{i1}\gamma_{i1} + \cdot\cdot + c_{in}\gamma_{in})$$
$$+ \cdot\cdot + c_{nk}(c_{n1}\gamma_{i1} + \cdot\cdot + c_{nn}\gamma_{in}) = \gamma_{ik}.$$

Der Coefficient von c_{ik} ist ε, die Coefficienten der übrigen Grössen $c_{1k}, \cdot\cdot, c_{nk}$ verschwinden (§. 3, 3).

V. Die Coefficienten der orthogonalen Substitution genügen dem zweiten System von Identitäten (EULER)

$$c_{i1}^2 + c_{i2}^2 + \cdot\cdot + c_{in}^2 = 1$$
$$c_{i1}c_{k1} + c_{i2}c_{k2} + \cdot\cdot + c_{in}c_{kn} = 0.$$

Denn nach (IV) ist

$$\varepsilon(c_{i1}c_{k1} + \cdot\cdot + c_{in}c_{kn}) = \gamma_{i1}c_{k1} + \cdot\cdot + \gamma_{in}c_{kn}.$$

Dieses Aggregat hat aber den Werth ε oder 0, je nachdem i und k gleich oder ungleich sind (§. 3, 3).

VI. Unter den partialen Determinanten, welche man aus dem System der Coefficienten einer orthogonalen Substitution bilden kann, findet folgender Zusammenhang statt (JACOBI):

$$\begin{vmatrix} c_{m+1,m+1} & \cdot\cdot & c_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ c_{n,m+1} & \cdot\cdot & c_{nn} \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\cdot & c_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot\cdot & c_{mm} \end{vmatrix}.$$

Denn nach §. 6, 2 hat man

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdot\cdot & \gamma_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \gamma_{m1} & \cdot\cdot & \gamma_{mm} \end{vmatrix} = \varepsilon^{m-1} \begin{vmatrix} c_{m+1,m+1} & \cdot\cdot & c_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ c_{n,m+1} & \cdot\cdot & c_{nn} \end{vmatrix}$$

und nach (IV)

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdot\cdot & \gamma_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \gamma_{m1} & \cdot\cdot & \gamma_{mm} \end{vmatrix} = \varepsilon^{m} \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot\cdot & c_{1m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot\cdot & c_{mm} \end{vmatrix}.$$

Durch Vergleichung dieser Identitäten ergiebt sich die behauptete Identität.

Noch einige weniger nahe liegende Relationen zwischen den Coefficienten einer orthogonalen Substitution haben Euler in der zuerst erwähnten Abhandlung und Jacobi Crelle J. 30 p. 46 angegeben. Vergl. Hesse Crelle J. 57 p. 175.

6. Da die n^2 Coefficienten einer orthogonalen Substitution $\frac{1}{2}n(n+1)$ Gleichungen (5, 1) zu genügen haben, so lassen sie sich als Functionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ unbestimmten Grössen

$$\begin{matrix} b_{12} & b_{13} & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ & b_{23} & \cdot & \cdot & b_{2n} \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & b_{n-1,n} \end{matrix}$$

betrachten. In der That hat Euler nicht nur den Weg angezeigt, wie man durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ binäre Transformationen die Coefficienten einer orthogonalen Substitution als Functionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ unbestimmten Grössen darstellen könne, sondern er hat auch in den Fällen $n=3$ und $n=4$ diese Coefficienten durch die unbestimmten Grössen rational ausgedrückt. Mit Hülfe der Determinanten ist es Cayley (l. c.) gelungen, bei n Variablen die Coefficienten einer orthogonalen Substitution als rationale Functionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ unbestimmten Grössen darzustellen.

Wenn nämlich durch $b_{12}, \ldots, b_{n-1,n}$ unbestimmte Grössen bezeichnet werden, wenn man unter den Voraussetzungen

$$b_{ik} + b_{ki} = 0\,, \qquad b_{11} = b_{22} = \ldots = \omega$$

die Determinante

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot & \cdot & b_{nn} \end{vmatrix}$$

bildet und den Coefficienten von b_{ik} in B durch β_{ik} bezeichnet, so hat man

$$c_{ik} = \frac{2\omega\beta_{ik}}{B}\,, \qquad c_{ii} = \frac{2\omega\beta_{ii} - B}{B}$$

als allgemeine Formeln für die Coefficienten einer orthogonalen Substitution, deren Determinante den Werth 1 hat. Die Coefficienten einer orthogonalen Substitution von der Determinante -1 erhält man, indem man im System der gefundenen Coef-

ficienten bei einer ungeraden Anzahl paralleler Reihen die Zeichen ändert.

Beweis. Die Grössen $x_1, x_2, .., x_n$ können dadurch von den Grössen $y_1, y_2, .., y_n$ abhängig gemacht werden, dass man zugleich

$$x_i = b_{1i} z_1 + .. + b_{in} z_n$$
$$y_i = b_{i1} z_1 + .. + b_{ni} z_n$$

setzt. Durch Auflösung der linearen Systeme

$$\begin{array}{lll} x_1 = b_{11} z_1 + .. + b_{1n} z_n & \quad & y_1 = b_{11} z_1 + .. + b_{n1} z_n \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\ x_n = b_{n1} z_1 + .. + b_{nn} z_n & & y_n = b_{1n} z_1 + .. + b_{nn} z_n \end{array}$$

findet man (§. 8, 1)

$$B z_i = \beta_{1i} x_1 + \beta_{2i} x_2 + .. + \beta_{ni} x_n$$
$$B z_i = \beta_{i1} y_1 + \beta_{i2} y_2 + .. + \beta_{in} y_n .$$

Vermöge der Voraussetzungen $b_{ik} + b_{ki} = 0$, $b_{ii} = \omega$ und des zwischen x_i, y_i und den Grössen $z_1, z_2, .., z_n$ angenommenen Zusammenhangs ist aber

$$x_i + y_i = 2 \omega z_i ,$$

folglich hat man zugleich

$$B y_i = 2 \omega \beta_{1i} x_1 + .. + (2 \omega \beta_{ii} - B) x_i + .. + 2 \omega \beta_{ni} x_n$$
$$B x_i = 2 \omega \beta_{i1} y_1 + .. + (2 \omega \beta_{ii} - B) y_i + .. + 2 \omega \beta_{in} y_n ,$$

oder abgekürzt

$$y_i = c_{1i} x_1 + .. + c_{ni} x_n$$
$$x_i = c_{i1} y_1 + .. + c_{in} y_n .$$

Aus der Identität

$$y_i = c_{1i}(c_{11} y_1 + .. + c_{1n} y_n) + .. + c_{ni}(c_{n1} y_1 + .. + c_{nn} y_n)$$

folgen die Identitäten

$$1 = c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + .. + c_{ni}^2$$
$$0 = c_{1i} c_{1k} + c_{2i} c_{2k} + .. + c_{ni} c_{nk} ,$$

wodurch diese rationalen Functionen der unbestimmten Grössen $b_{12}, .., b_{n-1,n}$ als Coefficienten einer orthogonalen Substitution characterisirt werden (5, 1).

Dass die Determinante ε dieser orthogonalen Substitution den Werth 1 (nicht -1) hat, erkennt man durch Bildung des Products εB^{n+1} d. i.

$$\begin{vmatrix} 2\omega\beta_{11}-B & 2\omega\beta_{12} & 2\omega\beta_{13} & . \\ 2\omega\beta_{21} & 2\omega\beta_{22}-B & 2\omega\beta_{23} & . \\ 2\omega\beta_{31} & 2\omega\beta_{32} & 2\omega\beta_{33}-B & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & . \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & . \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

Weil nach §. 3, 3

$$2\omega\beta_{i1}b_{k1} + \ldots + (2\omega\beta_{ii} - B)b_{ki} + \ldots + 2\omega\beta_{in}b_{kn} = Bb_{ik}$$

$$2\omega\beta_{i1}b_{i1} + \ldots + (2\omega\beta_{ii} - B)b_{ii} + \ldots + 2\omega\beta_{in}b_{in} = Bb_{ii}$$

ist, so hat das Product (§. 5, 4) den Werth B^{n+1}, folglich ist $\varepsilon = 1$.

Wenn man endlich die Coefficienten

$$c_{1i}, \quad c_{2i}, \ldots, c_{ni} \qquad \text{oder} \qquad c_{k1}, \quad c_{k2}, \ldots, c_{kn}$$

mit den entgegengesetzten Zeichen versieht, so wechselt die Determinante der Substitution ihr Zeichen, während die characteristischen Gleichungen (5, I. V)

$$c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \ldots + c_{ni}^2 = 1$$
$$c_{1i}c_{1k} + c_{2i}c_{2k} + \ldots + c_{ni}c_{nk} = 0$$

oder

$$c_{k1}^2 + c_{k2}^2 + \ldots + c_{kn}^2 = 1$$
$$c_{k1}c_{i1} + c_{k2}c_{i2} + \ldots + c_{kn}c_{in} = 0$$

keine Veränderung erleiden.

Beispiele. Für $n = 2$ findet man

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 .$$

Die Coefficienten der einzelnen Elemente in B sind

$$\begin{matrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 . \end{matrix}$$

Daher sind die Coefficienten einer binären orthogonalen Substitution von der Determinante 1 folgende:

$$\begin{matrix} \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} & \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \\ -\frac{2\lambda}{1+\lambda^2} & \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} . \end{matrix}$$

Die orthogonale Substitution

$$\begin{array}{cc} \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} & \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \\[2ex] \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} & -\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{array}$$

hat die Determinante -1.

Für $n = 3$ findet man (§. 7, 4)

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \nu & -\mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$

Die Coefficienten der einzelnen Elemente in B sind

$$\begin{array}{ccc} 1 + \lambda^2 & \nu + \lambda\mu & -\mu + \lambda\nu \\ -\nu + \lambda\mu & 1 + \mu^2 & \lambda + \mu\nu \\ \mu + \lambda\nu & -\lambda + \mu\nu & 1 + \nu^2 \,. \end{array}$$

Demnach findet man folgende Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution von der Determinante 1:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{B} & 2\,\frac{\nu+\lambda\mu}{B} & 2\,\frac{-\mu+\lambda\nu}{B} \\[2ex] 2\,\frac{-\nu+\lambda\mu}{B} & \frac{1+\mu^2-\nu^2-\lambda^2}{B} & 2\,\frac{\lambda+\mu\nu}{B} \\[2ex] 2\,\frac{\mu+\lambda\nu}{B} & 2\,\frac{-\lambda+\mu\nu}{B} & \frac{1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2}{B} \end{array}$$

wie schon Euler in der zuerst erwähnten Abhandlung p. 101 angegeben hat. Diese Coefficienten sind von Rodrigues (Liouv. J. 5 p. 405) aus denselben Formeln abgeleitet worden, welche Euler (Nov. Comm. Petrop. 20 p. 217) zur Transformation eines dreirechtwinkeligen Coordinatensystems aufgestellt hatte. Um die Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution von der Determinante -1 zu erhalten, braucht man nur in dem obigen System die Zeichen von einer oder drei Zeilen oder von eben so viel Colonnen zu verändern.

Für $n = 4$ findet man

$$B = \begin{vmatrix} \omega & a & b & c \\ -a & \omega & h & -g \\ -b & -h & \omega & f \\ -c & g & -f & \omega \end{vmatrix} = (\omega^2 + a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 + h^2 + \vartheta^2)\,\omega^2\,, \quad \omega\vartheta = af + bg + ch\,.$$

$$\begin{array}{llll}
\beta_{11} = & (\omega^2 + f^2 + g^2 + h^2)\omega^2 & \beta_{12} = & (a\omega + f\vartheta - bh + cg)\omega \\
\beta_{21} = & (-a\omega - f\vartheta + cg - bh)\omega & \beta_{22} = & (\omega^2 + f^2 + b^2 + c^2)\omega^2 \\
\beta_{31} = & (-b\omega - cf - g\vartheta + ah)\omega & \beta_{32} = & (-h\omega + fg - ab - c\vartheta)\omega \\
\beta_{41} = & (-c\omega + bf - ag - h\vartheta)\omega & \beta_{42} = & (g\omega + fh + b\vartheta - ca)\omega \\
\\
\beta_{13} = & (b\omega + g\vartheta - cf + ah)\omega & \beta_{14} = & (c\omega + h\vartheta - ag + bf)\omega \\
\beta_{23} = & (h\omega + fg + c\vartheta - ab)\omega & \beta_{24} = & (-g\omega + hf - ac - b\vartheta)\omega \\
\beta_{33} = & (\omega^2 + g^2 + c^2 + a^2)\omega^2 & \beta_{34} = & (f\omega + gh + a\vartheta - bc)\omega \\
\beta_{43} = & (-f\omega + gh - bc - a\vartheta)\omega & \beta_{44} = & (\omega^2 + h^2 + a^2 + b^2)\omega^2
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
Bc_{11} &= [\omega^2 - \vartheta^2 + (f^2 - a^2) + (g^2 - b^2) + (h^2 - c^2)]\omega^2 \\
Bc_{22} &= [\omega^2 - \vartheta^2 + (f^2 - a^2) - (g^2 - b^2) - (h^2 - c^2)]\omega^2 \\
Bc_{33} &= [\omega^2 - \vartheta^2 - (f^2 - a^2) + (g^2 - b^2) - (h^2 - c^2)]\omega^2 \\
Bc_{44} &= [\omega^2 - \vartheta^2 - (f^2 - a^2) - (g^2 - b^2) + (h^2 - c^2)]\omega^2
\end{aligned}$$

u. s. f. Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich ohne Weiteres die Coefficienten einer quaternären orthogonalen Substitution von der Determinante 1 oder -1 aufstellen.

Cayley's System dieser Coefficienten in Crelle J. 32 p. 122 enthält zwei Fehler (in β_{24} steht $-hf$ statt hf, in Bc_{11}, Bc_{22}, .. steht 1 statt $1 - \vartheta^2$), welche in der neueren Mittheilung Cayley's Crelle J. 50 p. 311 nicht vorkommen. Dagegen ist an dem zuletzt erwähnten Orte p. 312 Z. 5 v. o. der Druckfehler $+\delta\gamma'$ in $-\delta\gamma'$ zu verbessern. Die von Cayley gefundenen Coefficienten einer quaternären orthogonalen Substitution kommen in anderer Form bei Euler (Nov. Comm. Petrop. 15 p. 102) vor, der sie »nulla certa methodo, sed potius quasi divinando« erhalten hatte. Euler fügt hinzu: »si quis viam directam ad hanc solutionem manuducentem investigaverit, insignia certe subsidia analysi attulisse erit censendus.« Es ist Cayley nicht entgangen, wie sich aus den von ihm aufgestellten Coefficienten die Euler'sche Lösung ableiten lässt (vergl. Crelle J. 50 p. 312). Setzt man im obigen System

$$\omega = -\frac{s+d}{2}, \quad f = \frac{r+c}{2}, \quad g = -\frac{q+b}{2}, \quad h = \frac{p+a}{2},$$

$$\vartheta = \frac{s-d}{2}, \quad a = \frac{r-c}{2}, \quad b = -\frac{q-b}{2}, \quad c = \frac{p-a}{2},$$

und ändert man die Zeichen der letzten Horizontalreihe, wodurch die Determinante der orthogonalen Substitution den Werth -1 annimmt, so erhält man Euler's System ohne irgend eine

Abweichung. Denn das zweite Element der zweiten Horizontalreihe enthält bei Euler nur durch einen Druckfehler $-ds$ statt $+ds$.

7. Die binäre und ternäre orthogonale Substitution ist in der Geometrie gleichbedeutend mit der Transformation der orthogonalen Punktcoordinaten. Um von dem orthogonalen System x, y zu dem orthogonalen System x', y' überzugehen, unter der Voraussetzung, dass x, y, x', y' Richtungen einer Ebene sind, hat man die lineare Substitution zu machen, deren Coefficienten

$$\begin{matrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{matrix}$$

sind. Wenn Winkel von gleichen Zeichen durch Drehungen von einerlei Sinn beschrieben werden, mithin $xy + yx = 0$ ist, so hat man

$$xy' = xx' + x'y', \quad yx' = yx + xx', \quad yy' = yx + xx' + x'y'.$$

Sind nun die Winkel xy und $x'y'$ beide $= 90^0$, so ist

$$\cos xy' = -\sin xx', \quad \cos yx' = \sin xx', \quad \cos yy' = \cos xx'.$$

Wenn dagegen $xy = 90^0$ und $x'y' = -90^0$ ist, so ist

$$\cos xy' = \sin xx', \quad \cos yx' = \sin xx', \quad \cos yy' = -\cos xx'.$$

Daher hat man, wie bekannt, beim Uebergange zu einem System desselben Sinnes die lineare Substitution

$$\begin{matrix} \cos xx' & -\sin xx' \\ \sin xx' & \cos xx' \end{matrix}$$

von der Determinante 1 zu machen; beim Uebergange zu einem System entgegengesetzten Sinnes ist die erforderliche Substitution

$$\begin{matrix} \cos xx' & \sin xx' \\ \sin xx' & -\cos xx' \end{matrix}$$

von der Determinante -1.

Diese Bemerkungen werden durch ein bekanntes goniometrisches Theorem (s. unten §. 16, 1) bestätigt, nach welchem für beliebige Richtungen einer Ebene x, y, x', y'

$$\begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{vmatrix} = \sin xy \sin x'y'.$$

Diese Determinante ist positiv oder negativ, je nachdem $\sin xy$ und $\sin x'y'$ einerlei Zeichen haben oder nicht.

Umgekehrt schliesst man aus den Gleichungen

$$\cos^2 xx' + \cos^2 xy' = 1 ,$$
$$\cos^2 yx' + \cos^2 yy' = 1 ,$$
$$\cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' = 0 ,$$

dass $\sin^2 xy$ und $\sin^2 x'y'$ den Werth 1 haben. Denn nach der Multiplicationsregel (§. 5, 4) ist

$$\sin^2 xy \sin^2 x'y' = \begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

Um die angegebenen Substitutionen zu rationalisiren, braucht man nur $\cos xx' = \cos^2 \frac{1}{2} xx' (1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} xx')$ u. s. w. zu benutzen und die Coefficienten der Substitution durch $\operatorname{tang} \frac{1}{2} xx'$ auszudrücken. Vergl. (6) Beispiel 1.

8. Um von dem orthogonalen Coordinatensystem x, y, z zu dem orthogonalen System x', y', z' überzugehen, hat man bekanntlich die lineare Substitution

$$\begin{matrix} \cos xx' & \cos xy' & \cos xz' \\ \cos yx' & \cos yy' & \cos yz' \\ \cos zx' & \cos zy' & \cos zz' \end{matrix}$$

zu machen, deren Coefficienten den Gleichungen (5, I) genügen müssen, mithin Functionen von 3 unbestimmten Grössen sind. Bezeichnet O den gemeinschaftlichen Anfang der Coordinaten und wird die Kugel, deren Centrum O und deren Radius die Längeneinheit ist, von den Richtungen der positiven Coordinaten in X, Y, Z, X', Y', Z' geschnitten, so sind die Coordinatensysteme desselben oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem die sphärischen Dreiecke XYZ und $X'Y'Z'$, oder die Tetraeder $OXYZ$ und $OX'Y'Z'$ desselben oder entgegengesetzten Sinnes sind.

1. Bei zwei sphärischen Figuren, wenn sie gleich und ähnlich und desselben Sinnes sind, giebt es einen sich selbst entsprechenden Punkt S von solcher Lage, dass

$$SX = SX', \qquad SY = SY', \qquad SZ = SZ',$$
$$\text{Winkel } XSY = X'SY', \qquad YSZ = Y'SZ', \qquad XSZ = X'SZ',$$
$$XSX' = YSY' = ZSZ' \text{ *)}.$$

Nach einem elementaren Satze der sphärischen Trigonometrie hat man daher, wenn OS durch s und der Winkel XSX' durch φ bezeichnet wird,

$$\cos xx' = \cos^2 sx + \sin^2 sx \cos\varphi = \cos^2 sx\,(1 - \cos\varphi) + \cos\varphi$$
$$\cos yy' = \cos^2 sy + \sin^2 sy \cos\varphi = \cos^2 sy\,(1 - \cos\varphi) + \cos\varphi$$
$$\cos zz' = \cos^2 sz + \sin^2 sz \cos\varphi = \cos^2 sz\,(1 - \cos\varphi) + \cos\varphi\,.$$

Wenn man ferner die gleichen Winkel XSY und $X'SY'$ durch ϑ bezeichnet, so hat man nach demselben Satze der Trigonometrie

$$\cos xy' = \cos sx \cos sy' + \sin sx \sin sy' \cos(\varphi + \vartheta)$$
$$= \cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos\varphi \cos\vartheta - \sin sx \sin sy \sin\varphi \sin\vartheta\,.$$

Da aber

$$\cos xy = \cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos\vartheta = 0\,,$$
$$\sin sx \sin sy \sin\vartheta = 6\;OXYS = \sin xy \cos sz = \cos sz\,,$$

so erhält man

$$\cos xy' = \cos sx \cos sy\,(1 - \cos\varphi) - \cos sz \sin\varphi\,.$$

Aus dem Werthe von $\cos xy'$ findet man $\cos yx'$, weil der Winkel $YSX' = YSX + XSX' = -\varphi + \vartheta$ ist, durch Vertauschung von φ mit $-\varphi$

$$\cos yx' = \cos sx \cos sy\,(1 - \cos\varphi) + \cos sz \sin\varphi\,.$$

Ebenso ist

$$\cos yz' = \cos sy \cos sz\,(1 - \cos\varphi) - \cos sx \sin\varphi$$
$$\cos zy' = \cos sy \cos sz\,(1 - \cos\varphi) + \cos sx \sin\varphi$$

$$\cos zx' = \cos sz \cos sx\,(1 - \cos\varphi) - \cos sy \sin\varphi$$
$$\cos xz' = \cos sz \cos sx\,(1 - \cos\varphi) + \cos sy \sin\varphi \text{ **)},$$

---

*) Vergl. des Verf. Abhandlung über die Gleichheit und Aehnlichkeit u. s. w. Dresden 1852, § 31 und 52, oder Elem. d. Math. 5tes Buch §. 4, 18.

**) Diess sind die von Euler Nov. Comm. Petrop. 20 p. 217 gefundenen Formeln, welche Jacobi Crelle J. 2 p. 188 in Erinnerung gebracht hat mit der Aufforderung, dieselben einfacher abzuleiten.

wo von den verfügbaren Grössen sx, sy, sz, φ die ersteren durch die Gleichung

$$\cos^2 sx + \cos^2 sy + \cos^2 sz = 1$$

unter einander verbunden sind.

Um diese Substitutionscoefficienten zu rationalisiren, führt man $\frac{1}{2}\varphi$ ein und erhält

$$\cos xx' = \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi + 2\cos^2 sx \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi - \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi$$
$$\cos xy' = 2\cos sx \cos sy \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi - 2\cos sz \sin \tfrac{1}{2}\varphi \cos \tfrac{1}{2}\varphi$$

u. s. f. Setzt man

$$\cos sx \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi = \lambda\,, \quad \cos sy \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi = \mu\,, \quad \cos sz \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi = \nu\,,$$

mithin

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\varphi = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2\,, \quad \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\varphi} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2\,,$$

so erhält man das obige System rationaler Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution (6).

II. Bei zwei sphärischen Figuren, wenn sie gleich und ähnlich und entgegengesetzten Sinnes sind, giebt es einen sich selbst entsprechenden Hauptkreis, dessen Pol S seinem Gegenpunkt entspricht, so dass

$$SX + SX' = 180^0\,, \quad SY + SY' = 180^0\,, \quad SZ + SZ' = 180^0\,,$$
$$\text{Winkel } XSY = X'SY'\,, \quad YSZ = Y'SZ'\,, \quad XSZ = X'SZ'\,,$$
$$XSX' = YSY' = ZSZ'\,.$$

Unter Annahme der vorigen Bezeichnungen hat man

$$\cos xx' = -\cos^2 sx + \sin^2 sx \cos\varphi = -\cos^2 sx\,(1 + \cos\varphi) + \cos\varphi$$
$$\cos xy' = -\cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos(\varphi + \vartheta)$$
$$= -\cos sx \cos sy\,(1 + \cos\varphi) - \cos sz \sin\varphi$$

u. s. w. Diese Formeln unterscheiden sich von den im vorigen Falle gefundenen nur durch die Zeichen, nachdem φ mit $180^0 - \varphi$ vertauscht worden ist. Der Winkel $180^0 - \varphi$ ist aber derjenige, welchen das System x', y', z' um die Axe s beschreiben muss, damit $X'Y'Z'$ mit der Gegenfigur von XYZ zusammenfällt.

III. Nach v. Staudt's Theorem (s. unten §. 16, 6) ist für beliebige Winkel und Lagen der coordinirten Axen

$$\begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' & \cos xz' \\ \cos yx' & \cos yy' & \cos yz' \\ \cos zx' & \cos zy' & \cos zz' \end{vmatrix} = 36\; OXYZ\,.\,OX'Y'Z'\,.$$

Folglich ist die Determinante positiv oder negativ, je nachdem diese Tetraeder oder die von den Axen gebildeten Ecken desselben oder entgegengesetzten Sinnes sind. Bei einem orthogonalen System beträgt aber das zugehörige Tetraeder $\frac{1}{6}$ Cubikeinheit, daher ist die Determinante der orthogonalen Substitution 1 oder —1, je nachdem das neue System mit dem alten desselben oder entgegengesetzten Sinnes ist *).

IV. Umgekehrt schliesst man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos^2 xx' + \cos^2 xy' + \cos^2 xz' &= 1 \\ \cos^2 yx' + \cos^2 yy' + \cos^2 yz' &= 1 \\ \cos^2 zx' + \cos^2 zy' + \cos^2 zz' &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' + \cos xz' \cos yz' &= 0 \\ \cos xx' \cos zx' + \cos xy' \cos zy' + \cos xz' \cos zz' &= 0 \\ \cos yx' \cos zx' + \cos yy' \cos zy' + \cos yz' \cos zz' &= 0\,, \end{aligned}$$

dass die Systeme x, y, z und x', y', z' orthogonal sind **). Denn

$$(36\; OXYZ\,.\,OX'Y'Z')^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

worin nach der Regel für die Multiplication der Determinanten

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos xx' \cos xx' + \cos xy' \cos xy' + \cos xz' \cos xz' = 1 \\ a_{12} &= \cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' + \cos xz' \cos yz' = 0 \end{aligned}$$

u. s. w., so dass

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,.$$

---

*) Auf diesen Unterschied der Substitutionsdeterminanten hat Jacobi Crelle J. 15 p. 309 aufmerksam gemacht. Vergl. Möbius Statik §. 127, Magnus anal. Geom. des Raumes §. 13.

**) Dedekind Crelle J. 50 p. 272.

Nun ist $6\, OXYZ = \sin xy \sin xz \sin (xy \hat{} xz)$ u. s. w. Das Product der Sinus wird aber nur dann 1, wenn die Winkel recht sind.

9. Wenn $c_{11}, \ldots, c_{nn}$ die Coefficienten einer orthogonalen Substitution bedeuten, deren Determinante ε d. i. entweder 1 oder -1 ist, wenn

$$f(z) = \begin{vmatrix} c_{11}+z & c_{12} & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}+z & \cdot & \cdot & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot & \cdot & c_{nn}+z \end{vmatrix}$$

so ist die Gleichung $f(z) = 0$ reciprok und hat mit Ausnahme der Wurzel $-\varepsilon$, welche bei ungeradem n vorhanden ist, keine realen Wurzeln *).

Beweis. Die Entwickelung der Determinante $f(z)$ nach steigenden Potenzen von z (§. 4, 3) giebt vermöge der in (5, VI) bewiesenen Eigenschaft der zu $f(0)$ gehörigen partialen Determinanten ohne Weiteres zu erkennen, dass die Coefficienten von $z^0, z^1, z^2, \ldots$ von den Coefficienten von $z^n, z^{n-1}, z^{n-2}, \ldots$ sich nur durch den Factor ε unterscheiden, dass also

$$\frac{\varepsilon f(z)}{z^n} = f\left(\frac{1}{z}\right),$$

was sich durch Multiplication der Determinanten ε und $f(z)$ bestätigen lässt. Demnach ist $f(-\varepsilon) = (-1)^n \varepsilon^{n-1} f(-\varepsilon)$, also verschwindet $f(-\varepsilon)$, wenn n eine ungerade Zahl ist. Ueber die Realität der übrigen Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ erhält man Aufschluss durch das Product der Determinanten

$$f(z) f(-z) = \begin{vmatrix} d_{11}-z^2 & z d_{12} & z d_{13} & \cdot \\ z d_{21} & d_{22}-z^2 & z d_{23} & \cdot \\ z d_{31} & z d_{32} & d_{33}-z^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

worin nach der Multiplicationsregel

$$d_{ii} - z^2 = c_{i1} c_{i1} + \ldots + (c_{ii}+z)(c_{ii}-z) + \ldots + c_{in} c_{in}$$

$$z d_{ik} = c_{i1} c_{k1} + \ldots + (c_{ii}+z) c_{ki} + \ldots + c_{ik} (c_{kk}-z) + \ldots + c_{in} c_{kn}$$

---

*) Brioschi Liouv. J. 19 p. 253.

folglich (5, 1)

$$d_{ii} = 1\,, \qquad d_{ik} = c_{ki} - c_{ik}$$

ist. Daher hat man $d_{ik} + d_{ki} = 0$, und nach §. 7, 6

$$\frac{f(z)\,f(-z)}{z^n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z} - z & d_{12} & . \\ d_{21} & \frac{1}{z} - z & . \\ . & . & \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{z} - z\right)^n + \left(\frac{1}{z} - z\right)^{n-2} \Sigma D_2 + \ldots,$$

wobei die a. a. O. näher beschriebenen Coefficienten der Potenzen von $\frac{1}{z} - z$ positiv sind. Wenn nun z real ist, so ist für gerade oder ungerade n

$$\frac{f(z)\,f(-z)}{z^n} \quad \text{oder} \quad \frac{f(z)\,f(-z)}{z^n\left(\frac{1}{z} - z\right)}$$

positiv, folglich $f(z)$ von Null verschieden.

10. Die orthogonalen Substitutionen gehören zu denjenigen linearen Substitutionen, durch welche überhaupt eine gegebene quadratische Form von n Variablen in ein Aggregat von n Quadraten transformirt wird. Wenn die gegebene Form, die nach §. 13, 9 durch $\Sigma\, a_{ik} x_i x_k$ bezeichnet wird, durch die lineare Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11} y_1 + \ldots + c_{1n} y_n \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= c_{n1} y_1 + \ldots + c_{nn} y_n \end{aligned}$$

in das Aggregat $p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + \ldots + p_n y_n^2$ übergeht, so erfolgt die Identität

$$\sum_{i,k} a_{ik} (c_{i1} y_1 + \ldots)(c_{k1} y_1 + \ldots) = p_1 y_1^2 + \ldots + p_n y_n^2$$

unter den Bedingungen

$$\sum_{i,k} a_{ik} (c_{ir} c_{ks} + c_{is} c_{kr}) = 0\,, \qquad \sum_{i,k} a_{ik} c_{ir} c_{kr} = p_r\,.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$g_{is} = a_{i1} c_{1s} + \ldots + a_{in} c_{ns}\,,$$

so erhält man bei der Voraussetzung $a_{ki} = a_{ik}$ zur Bestimmung

der Substitution das unzureichende System von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen

$$c_{1r}g_{1s} + \cdot\cdot + c_{nr}g_{ns} = 0 .$$

Aus solchen Grössen c, welche diesem System genügen, bildet man dann

$$c_{1r}g_{1r} + \cdot\cdot + c_{nr}g_{nr} = p_r ,$$

und findet

$$g_{1r}x_1 + \cdot\cdot + g_{nr}x_n = p_r y_r ,$$

$$p_r y_r^2 = \frac{(g_{1r}x_1 + \cdot\cdot + g_{nr}x_n)^2}{g_{1r}c_{1r} + \cdot\cdot + g_{nr}c_{1r}} ,$$

so dass nur die Verhältnisse der Substitutionscoefficienten zu einander in Betracht kommen.

Die Discriminanten der gegebenen und der transformirten Form sind $\Sigma \pm a_{11} \cdot\cdot a_{nn}$ und $p_1 p_2 \cdot\cdot p_n$. Wenn nun die Determinante der Substitution den Werth ε hat, so ist (3)

$$p_1 \cdot\cdot p_n = \varepsilon^2 \Sigma \pm a_{11} \cdot\cdot a_{nn} .$$

Wenn man ferner den Coefficienten des Elements c_{ik} in der Determinante ε durch γ_{ik} bezeichnet, und die Gleichungen

$$\begin{array}{l} 0 = c_{11}g_{1r} + \cdot\cdot + c_{n1}g_{nr} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_r = c_{1r}g_{1r} + \cdot\cdot + c_{nr}g_{nr} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 = c_{1n}g_{1r} + \cdot\cdot + c_{nn}g_{nr} \end{array}$$

der Reihe nach mit $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \cdot\cdot$ multiplicirt, so findet man durch Addition

$$p_r \gamma_{ir} = \varepsilon g_{ir}$$

und hiernach wie oben (5)

$$p_1 \cdot\cdot p_m \Sigma \pm c_{m+1,m+1} \cdot\cdot c_{nn} = \varepsilon \Sigma \pm g_{11} \cdot\cdot g_{mm} .$$

11. Die Summe $f = \Sigma a_{ik} x_i y_k$ von n^2 Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für i und k alle Numern von 1 bis n setzt, und deren Coefficienten a_{ik} einer Beschränkung nicht unterliegen, ist eine homogene lineare Function sowohl der Variablen $x_1, \cdot\cdot, x_n$, als auch der Variablen $y_1, \cdot\cdot, y_n$, und heisst deshalb eine bilineare Function derselben *).

---

*) JACOBI Crelle J. 53 p. 265. Vergl. CHRISTOFFEL Crelle J. 63 p. 255.

Bildet man die Differentialquotienten

$$u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n$$

$$v_k = \frac{\partial f}{\partial y_k} = a_{1k} x_1 + \ldots + a_{nk} x_n$$

so hat man die characteristische Gleichung

$$f = u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n = v_1 y_1 + \ldots + v_n y_n .$$

Unter der Voraussetzung, dass der Coefficient a_{11} nicht verschwindet, dass also in u_1 die Variable y_1, in v_1 die Variable x_1 nicht fehlt, bilde man die bilineare Function

$$f_1 = f - \frac{u_1 v_1}{a_{11}} = \Sigma\, a'_{ik} x_i y_k$$

welche die Variablen x_1, y_1 nicht mehr enthält, weil

$$a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{i1} a_{1k}}{a_{11}}$$

verschwindet, wenn für i oder k die Numer 1 gesetzt wird. Mittelst der Differentialquotienten

$$u'_i = \frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \qquad v'_k = \frac{\partial f_1}{\partial y_k}$$

kann ferner unter der Voraussetzung, dass a'_{22} nicht verschwindet, dass also weder y_2 in u'_2 noch x_2 in v'_2 fehlt, die bilineare Function

$$f_2 = f_1 - \frac{u'_2 v'_2}{a'_{22}} = \Sigma\, a''_{ik} x_i y_k$$

gebildet werden, welche auch die Variablen x_2, y_2 nicht mehr enthält, weil der Coefficient

$$a''_{ik} = a'_{ik} - \frac{a'_{i2} a'_{2k}}{a'_{22}}$$

verschwindet, wenn für i oder k die Numer 2 gesetzt wird. Durch fortgesetzte Ausscheidungen der angegebenen Art erhält man die besondere Darstellung

$$f = \frac{u_1 v_1}{a_{11}} + \frac{u'_2 v'_2}{a'_{22}} + \frac{u''_3 v''_3}{a''_{33}} + \ldots$$

Die Differentiation ergiebt aber

$$u'_i = u_i - \frac{u_1 a_{i1}}{a_{11}}, \qquad v'_k = v_k - \frac{v_1 a_{1k}}{a_{11}},$$

$$u''_i = u'_i - \frac{u'_2 a'_{i2}}{a'_{22}}, \qquad v''_k = v'_k - \frac{v'_2 a'_{2k}}{a'_{22}},$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

mithin ist u'_i eine von y_1 unabhängige homogene lineare Verbindung von u_1 und u_i; u''_i eine von y_1 und y_2 unabhängige homogene lineare Verbindung von u'_2 und u'_i, also auch von $u_1 . u_2 . u_i$; u. s. f. In allen diesen Verbindungen hat u_i den Coefficienten 1. Daher kann

$$u^{(m)}_i = C_1 u_1 + \ldots + C_m u_m + u_i$$

gesetzt werden. Weil diese Formel von $y_1, \ldots, y_m$ unabhängig sein soll, so verschwinden die Coefficienten dieser Grössen, und man hat

$$0 = C_1 a_{11} + \ldots + C_m a_{m1} + a_{i1}$$

$$\cdots$$

$$0 = C_1 a_{1m} + \ldots + C_m a_{mm} + a_{im}$$

folglich (§. 8)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} & a_{i1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & \ldots & a_{mm} & a_{im} \\ u_1 & \ldots & u_m & u_i - u^{(m)}_i \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$u^{(m)}_i \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} & a_{i1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & \ldots & a_{mm} & a_{im} \\ u_1 & \ldots & u_m & u_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & u_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & u_m \\ a_{i1} & \ldots & a_{im} & u_i \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & a_{1,m+1} y_{m+1} + \ldots + a_{1n} y_n \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & a_{m,m+1} y_{m+1} + \ldots + a_{mn} y_n \\ a_{i1} & \ldots & a_{im} & a_{i,m+1} y_{m+1} + \ldots + a_{in} y_n \end{vmatrix}.$$

Aus $u^{(m)}_i$ wird $v^{(m)}_k$ abgeleitet, indem man u_r durch v_r, und a_{rs} durch a_{sr} ersetzt.

Die Variable y_k hat in $u^{(m)}_i$ den Coefficienten $a^{(m)}_{ik}$, also ist

$$a^{(m)}_{ik} \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm} = \Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm} a_{ik}$$

$$a^{(m)}_{m+1,m+1} = \frac{\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{m+1,m+1}}{\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{mm}}.$$

Unter Annahme der Bezeichnungen

$$A_m = \Sigma \pm a_{11} \, . \, . \, a_{mm}$$

$$U_m = \begin{vmatrix} a_{11} & . \, . & a_{1,m-1} & u_1 \\ . & . \, . & . & . \\ a_{m1} & . \, . & a_{m,m-1} & u_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & . \, . & a_{1,m-1} & a_{1m} y_m + \, . \, . \\ . & . \, . & . & . \quad . \\ a_{m1} & . \, . & a_{m,m-1} & a_{mm} y_m + \, . \, . \end{vmatrix}$$

$$= A_m y_m + \, . \, . \, ,$$

$$V_m = \begin{vmatrix} a_{11} & . \, . & a_{m-1,1} & v_1 \\ . & . \, . & . & . \\ a_{1m} & . \, . & a_{m-1,m} & v_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & . \, . & a_{m-1,1} & a_{m1} x_m + \, . \, . \\ . & . \, . & . & . \quad . \\ a_{1m} & . \, . & a_{m-1,m} & a_{mm} x_m + \, . \, . \end{vmatrix}$$

$$= A_m x_m + \, . \, . \, ,$$

ergiebt sich endlich

$$\frac{u^{(m)}{}_{m+1} \, v^{(m)}{}_{m+1}}{a^{(m)}{}_{m+1,m+1}} = \frac{U_{m+1} V_{m+1}}{A_m A_{m+1}} = \frac{A_{m+1}}{A_m} x_{m+1} y_{m+1} + \, . \, . \, ,$$

$$f = \frac{U_1 V_1}{A_1} + \frac{U_2 V_2}{A_1 A_2} + \frac{U_3 V_3}{A_2 A_3} + \, . \, . \, .$$

Wenn es demnach eine Anordnung der Variablen einer bilinearen Function giebt, bei der die partialen Determinanten $A_1, A_2, A_3, \, . \, .$ nicht verschwinden, so kann die bilineare Function auf eine bestimmte Weise als Summe von Producten homogener linearer Functionen $U_1 V_1, U_2 V_2, \, . \, .$ so dargestellt werden, dass U_m und V_m von der $m$ten (und den folgenden) Variablen je einer Schaar abhängen und die vorangehenden Variablen nicht enthalten.

12. Ebenso kann unter den analogen Voraussetzungen die quadratische Form $\Sigma \, a_{ik} x_i x_k$, deren Coefficienten a_{ik} und a_{ki} gleich sind, auf eine bestimmte Weise als Aggregat von Quadraten homogener linearer Functionen der Variablen so dargestellt werden, dass die $m$te Function von der $m$ten und den folgenden Variablen, aber nicht von den vorangehenden abhängt *). Denn die bilineare Function $f = \Sigma \, a_{ik} x_i y_k$ geht in die gegebene quadratische Form über, wenn y_k mit x_k, a_{ki} mit

*) Jacobi Crelle J. 53 p. 270 und 282. Diese Transformation der quadratischen Formen war von Gauss theor. combin. observ. 31 (Comm. Gött. V. 1819) angezeigt worden. Einen Beweis derselben findet man bei Brioschi Nouv. Ann. 1856 Juli.

a_{ik} zusammenfällt. Versteht man nun unter u_i, u'_i, .. die halben Differentialquotienten (§. 13, 1), so hat man (11)

$$f = \frac{U_1^2}{A_1} + \frac{U_2^2}{A_1 A_2} + \cdot\cdot + \frac{U_n^2}{A_{n-1} A_n}$$

worin $A_m = \Sigma \pm a_{11} \cdot\cdot a_{mm}$ eine nicht verschwindende partiale Determinante der Discriminante A_n bedeutet, und

$$U_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1,m-1} & u_1 \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot\cdot & a_{m,m-1} & u_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1,m-1} & a_{1m} x_m + \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot\cdot & a_{m,m-1} & a_{mm} x_m + \cdot\cdot \end{vmatrix}.$$

Die Anzahl der Quadrate, welche negative Coefficienten haben, ist der Anzahl der Zeichenwechsel gleich, welche die Reihe

$$1\,, \quad A_1\,, \quad A_2\,, \;\cdot\cdot\cdot\,, A_n$$

darbietet.

13. Wie man auch die quadratische Form $\Sigma\, a_{ik} x_i x_k$ durch reale lineare Substitutionen (10, 12) in Aggregate von Quadraten der neuen Variablen transformirt, so findet sich doch in allen Aggregaten dieselbe Anzahl von positiven und dieselbe Anzahl von negativen Coefficienten der Quadrate *). Hat man die gegebene Form durch eine Substitution in das Aggregat

$$p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + \cdot\cdot + p_n y_n^2$$

und durch eine andre Substitution in das Aggregat

$$q_1 z_1^2 + q_2 z_2^2 + \cdot\cdot + q_n z_n^2$$

verwandelt, so ist identisch

$$p_1 y_1^2 + \cdot\cdot + p_n y_n^2 - q_1 z_1^2 - \cdot\cdot\cdot - q_n z_n^2 = 0\,.$$

Sind nun m Coefficienten des einen Aggregats z. B. $p_1, \cdot\cdot, p_m$ positiv, die übrigen negativ, so können nicht weniger als m Coefficienten des andern Aggregats positiv sein. Wären z. B.

*) Dieses Princip ist von JACOBI 1847 erkannt, aber noch nicht veröffentlicht worden. Vergl. den nachgelassenen Aufsatz JACOBI's Crelle J. 53 p. 275 nebst den Mittheilungen von HERMITE und BORCHARDT a. a. O. p. 271 und 281. Dasselbe Princip hat SYLVESTER entdeckt und unter dem Namen »Tragheitsgesetz der quadratischen Formen« bekannt gemacht Philos. Mag. 1852, II p. 140 und Philos. Trans. 1853 p. 481. Durch directe Beziehungen zwischen den Grossen p und q ist der Beweis von BRIOSCHI gefuhrt worden Nouv. Ann. 1856 Juli.

$q_1, \ldots, q_{m-1}$ positiv, und $q_m, \ldots, q_n$ negativ, so gäbe es Werthe von $x_1, \ldots, x_n$, durch welche

$$z_1, \ldots, z_{m-1}, \quad y_{m+1}, \ldots, y_n$$

verschwinden, während

$$p_1 y_1^2 + \ldots + p_m y_m^2 - q_m z_m^2 - \ldots - q_n z_n^2$$

positiv ist, gegen die Voraussetzung.

Anmerkung. Aus diesem Princip folgt, dass die quadratischen Formen von n Variablen (bei nicht verschwindender Discriminante §. 12, 4) unter einander specifisch verschieden sind je nach den Anzahlen positiver oder negativer Quadrate, durch welche sie dargestellt werden können. Unter den n Quadraten sind entweder n, oder $n-1$, oder $n-2, \ldots$ von einerlei Zeichen. Die Formen der ersten Art haben bei realen Werthen der Variablen nur positive oder nur negative Werthe, und heissen deshalb bei Gauss (Disq. arithm. 271) formae definitae, während die Formen der übrigen Arten formae indefinitae genannt werden.

Wenn für $n=3$ oder $n=4$ die Verhältnisse von 2 Variablen zu der 3ten oder die Verhältnisse von 3 Variablen zu der 4ten die Coordinaten eines Punktes sind, und die gegebene Form nebst der durch eine lineare Substitution transformirten verschwindet, so sind die zu diesen Gleichungen gehörenden Curven oder Flächen zweiten Grades collinear (homographisch). Aus dem obigen Princip folgt nun, dass Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln ohne Unterschied collinear sind, dass hingegen die Flächen zweiten Grades in 2 Arten zerfallen und nur die Flächen derselben Art collinear sind. Zu der einen Art gehören die Ellipsoide nebst den elliptischen Paraboloiden und Hyperboloiden; die andre Art umfasst die hyperbolischen Hyperboloide und Paraboloide. Möbius baryc. Calc. p. 314. Jacobi a. a. O. p. 280.

Eine lineare Substitution, durch welche die Form

$$x_1^2 + \ldots + x_i^2 - x_{i+1}^2 - \ldots - x_n^2$$

in die Form

$$y_1^2 + \ldots + y_i^2 - y_{i+1}^2 - \ldots - y_n^2$$

verwandelt werden soll, kann aus einer orthogonalen Substitu-

tion abgeleitet werden, durch welche man die Form mit lauter positiven Quadraten

$$x_1^2 + \ldots + x_i^2 + y_{i+1}^2 + \ldots + y_n^2$$

in die Form

$$y_1^2 + \ldots + y_i^2 + x_{i+1}^2 + \ldots + x_n^2$$

überführt. Mittelst der für $y_{i+1}, \ldots, y_n$ zu machenden Substitutionen werden dann die Variablen $x_{i+1}, \ldots, x_n$ durch $y_1, \ldots, y_n$ ausgedrückt. JACOBI a. a. O. p. 278.

14. Unter einer STURM'schen Reihe wird eine Reihe von Gliedern verstanden, welche durch die in ihr vorhandenen Zeichenwechsel reale Wurzeln einer gegebenen algebraischen Gleichung anzeigt [*]. JACOBI und HERMITE haben quadratische Formen angegeben, bei denen die Zählung der positiven und der negativen Quadrate, durch welche sie dargestellt werden können, denselben Dienst leistet, als die Betrachtung einer STURM'schen Reihe.

Aus den von einander verschiedenen Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$, einem gegebenen realen Werth ω und den Unbestimmten $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ bilde man die Summe

$$H = \Sigma (\omega - \alpha)(x_0 + x_1 \alpha + \ldots + x_{m-1} \alpha^{m-1})^2$$

indem man für α die Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ setzt. Jede reale unter der Grenze ω liegende Wurzel liefert ein positives Quadrat in die Summe H. Dagegen ergiebt jedes Paar von conjugirt complexen Wurzeln ein positives und ein negatives Quadrat für die Summe H, weil

---

[*] Der nach STURM benannte Lehrsatz ist von demselben der Pariser Academie 1829 Mai 23, ferner in Férussac Bulletin XI p. 419, Choquet et Mayer Algèbre 1832 und Mém. prés. 1835 tom. 6 mitgetheilt worden. Vergl. MOIGNO Liouv. J. 5 p. 75. Die allgemeine Aufstellung einer Sturm'schen Reihe verdankt man SYLVESTER (Philos. Mag. 1839 Dec.), dessen Angaben von STURM (Liouv. J. 7 p. 356) bewiesen, von CAYLEY (Liouv. J. 11 p. 297. 13 p. 269) und JOACHIMSTHAL (Crelle J. 48 p. 386) erweitert wurden. Die zur Vertretung einer Sturm'schen Reihe dienende quadratische Form ist von HERMITE Compt. rend. 1853, I p. 294 aufgestellt worden, weniger umfassend bereits von JACOBI 1847, wie aus einer Mittheilung von BORCHARDT Crelle J. 53 p. 281 hervorgeht. Vergl. SYLVESTER Philos. Trans. 1853 p. 484, BRIOSCHI Nouv. Ann. 1856 Juli und die Monographie HATTENDORF über die Sturm'schen Functionen. Göttingen 1862.

$$(\beta + \gamma\sqrt{-1})(P + Q\sqrt{-1})^2 + (\beta - \gamma\sqrt{-1})(P - Q\sqrt{-1})^2$$
$$= \frac{2}{\beta}\left\{(\beta P - \gamma Q)^2 - (\beta^2 + \gamma^2)Q^2\right\}.$$

Also wird die Anzahl der verschiedenen realen unter oder über der Grenze ω liegenden Wurzeln gefunden, indem man die Anzahl der positiven oder der negativen Quadrate in der Summe H um die Anzahl der verschiedenen Paare von complexen Wurzeln vermindert. Die Anzahl der verschiedenen realen zwischen den Grenzen ω und ω' liegenden Wurzeln ergiebt sich darnach unabhängig von der Anzahl der complexen Wurzeln.

In der Summe H hat $x_i x_k$ den Coefficienten

$$t_{ik} = \Sigma(\omega - \alpha)\alpha^{i+k} = \omega s_{i+k} - s_{i+k+1}$$

wenn man durch s_r die Summe der $r$ten Potenzen der Wurzeln $\alpha_1, .., \alpha_m$ bezeichnet. Die Grössen s_r sind real und werden aus der Differenz der Quotienten $f'(x) : f(x)$ und $\varphi'(x) : \varphi(x)$ berechnet (§. 10, 6), indem man unter $\varphi(x)$ den Divisor versteht, welchen $f'(x)$ mit $f(x)$ in dem Falle gemein hat, dass die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ nicht alle von einander verschieden sind (§. 11, 20). Demnach ist $H = \Sigma\, t_{ik} x_i x_k$ eine quadratische Form mit realen Coefficienten, deren Glieder dadurch gebildet werden, dass man für i und k alle Numern von 0 bis $m - 1$ setzt, und welche durch je eine bestimmte Anzahl von positiven und negativen Quadraten darstellbar ist (12). Die Discriminante $T_{m-1} = \Sigma \pm t_{00} \cdot\cdot t_{m-1,m-1}$ und deren partiale Determinanten $T_{m-2}, T_{m-3}, ..$ können nach §. 10, 5 berechnet werden.

Anmerkung. Zu dem angegebenen Zweck hat Hermite (Crelle J. 52 p. 43) die symmetrische Function

$$G(x, y) = \frac{(y - \omega) f(x) f'(y) - (x - \omega) f(y) f'(x)}{y - x}$$

aufgestellt und in die Summe $\Sigma\, h_{ik} x^i y^k$ entwickelt, deren Exponenten im Allgemeinen von 0 bis $n - 1$ steigen. Dabei ist

$$G(x, y) = \frac{f(x) f(y)}{y - x}\left\{(y - \omega)\frac{f'(y)}{f(y)} - (x - \omega)\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \Sigma \frac{1}{x - \alpha}, \qquad \frac{y - \omega}{y - \alpha} - \frac{x - \omega}{x - \alpha} = \frac{(y - x)(\omega - \alpha)}{(x - \alpha)(y - \alpha)},$$

$$G(x, y) = \Sigma(\omega - \alpha)\frac{f(x)}{x - \alpha}\frac{f(y)}{y - \alpha}.$$

Von der Summe

$$G(x, x) = \Sigma(\omega - \alpha)\left\{\frac{f(x)}{(x-\alpha)}\right\}^2$$

gelten die oben über die Summe H gemachten Bemerkungen. Nun geht die quadratische Form $\Sigma h_{ik} x_i x_k$ in $G(x, x)$ über, wenn man $x_r = x^r$ setzt. Also sind die Anzahlen der positiven und negativen Quadrate, durch welche diese Form sich darstellen lässt, zugleich die Anzahlen der positiven und negativen Quadrate der Summe $G(x, x)$.

15. Zwei gegebene quadratische Formen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$

$$\varphi = \Sigma a_{ik} x_i x_k, \qquad \psi = \Sigma b_{ik} x_i x_k,$$

deren Discriminanten $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn}$ und $\Sigma \pm b_{11} \ldots b_{nn}$ nicht verschwinden, können im Allgemeinen durch eine bestimmte lineare Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11} y_1 + \ldots + c_{1n} y_n \\ &\ldots\ldots \\ x_n &= c_{n1} y_1 + \ldots + c_{nn} y_n \end{aligned}$$

deren Determinante den Werth ε hat, in die Formen

$$\begin{aligned} \varphi &= p_1 y_1^2 + \ldots + p_2 y_2^2 + \ldots + p_n y_n^2 \\ \psi &= s_1 p_1 y_1^2 + \ldots + s_2 p_2 y_2^2 + \ldots + s_n p_n y_n^2 \end{aligned}$$

gebracht werden*). Denn man hat zur Bestimmung der n^2 Substitutionscoefficienten $\frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}n(n-1) + n$ Gleichungen (10).

Bei dieser Transformation geht die quadratische Form $s\varphi - \psi$ mit der Discriminante

$$f(s) = \begin{vmatrix} sa_{11} - b_{11} & \ldots & sa_{1n} - b_{1n} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ sa_{n1} - b_{n1} & \ldots & sa_{nn} - b_{nn} \end{vmatrix}$$

*) Cauchy Exerc. de Math. 4 p. 140. Jacobi Crelle J. 12 p. 1. Vergl. Moutard in Poncelet Applic. p. 532. Die Auflösung dieses Problems ist tiefer ergründet worden durch Weierstrass Berl. Monatsbericht 1858 p. 207. Vergl. den Bericht von Brioschi Ann. di Matem. 1858 Juli und die Erweiterungen von Christoffel Crelle J. 63 p. 255.

in die Form $(s-s_1)p_1y_1^2 + \ldots + (s-s_n)p_ny_n^2$ über, deren Discriminante

$$(s-s_1)\ldots(s-s_n)p_1\ldots p_n = \varepsilon^2 f(s)$$

ist (3). Zugleich hat die Discriminante $p_1\ldots p_n$ der transformirten Form φ den Werth $\varepsilon^2\Sigma \pm a_{11}\ldots a_{nn}$, also ist

$$f(s) = (s-s_1)\ldots(s-s_n)\Sigma \pm a_{11}\ldots a_{nn}$$

d. h. $s_1, \ldots, s_n$ sind die Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades $f(s) = 0$. In der That sind $s_1\varphi - \psi$, $s_2\varphi - \psi$, .. quadratische Formen mit verschwindenden Discriminanten und von weniger als n Unbestimmten (§. 12, 4).

Setzt man wie oben (10)

$$g_{ik} = a_{i1}c_{1k} + \ldots + a_{in}c_{nk}, \qquad h_{ik} = b_{i1}c_{1k} + \ldots + b_{in}c_{nk},$$

und bezeichnet man den Coefficienten des Elements c_{ik} in ε durch γ_{ik}, so hat man

$$p_k\gamma_{ik} = \varepsilon g_{ik}, \qquad s_kp_k\gamma_{ik} = \varepsilon h_{ik}$$

folglich $s_kg_{ik} - h_{ik} = 0$ d. h.

$$(s_ka_{i1} - b_{i1})c_{1k} + \ldots + (s_ka_{in} - b_{in})c_{nk} = 0.$$

Indem man hierin für i die Numern $1, 2, \ldots, n$ setzt, erhält man n Gleichungen, vermöge deren (§. 8, 3)

$$\begin{vmatrix} s_ka_{11} - b_{11} & \cdot\ \cdot & s_ka_{1n} - b_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ s_ka_{n1} - b_{n1} & \cdot\ \cdot & s_ka_{nn} - b_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

$$c_{1k} : c_{2k} : \ldots : c_{nk} = f(s_k)_{i1} : f(s_k)_{i2} : \ldots : f(s_k)_{in}$$

ist, wenn man den Coefficienten des Elements $sa_{ik} - b_{ik}$ in $f(s)$ durch $f(s)_{ik}$ bezeichnet. Hiermit bestätigt es sich, dass s_k eine Wurzel der Gleichung $f(s) = 0$ ist. Aus den Verhältnissen $c_{1k} : c_{2k} : \ldots$ wird $p_ky_k^2$ berechnet (10). Dabei hat man (§. 6, 5)

$$f(s)_{ik} = f(s)_{ki}, \qquad f(s_r)_{ik}^2 = f(s_r)_{ii}f(s_r)_{kk}.$$

Die lineare Substitution erhält die Determinante 0 und wird deshalb unbrauchbar, wenn die Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ nicht alle von einander verschieden sind. Wenn aber diese Wurzeln alle von einander verschieden und z. B. s_1 und s_2 conjugirt complex sind, so sind auch $p_1y_1^2$ und $p_2y_2^2$ conjugirt

complex, mithin φ und ψ durch je n Quadrate darstellbar, welche nicht alle dasselbe Zeichen haben (14). Umgekehrt schliesst man: Wenn eine der Formen φ, ψ sich durch n Quadrate von einerlei Zeichen darstellen lässt, und die Gleichung $f(s) = 0$ lauter verschiedene Wurzeln hat, so sind diese Wurzeln real.

Wenn eine der gegebenen Formen zu der angezeigten Art gehört, so hat die Gleichung $f(s) = 0$ nur reale Wurzeln auch dann, wenn dieselben nicht alle von einander verschieden sind. Dabei ist eine λfache Wurzel der Gleichung $f(s) = 0$ zugleich eine $(\lambda - 1)$fache Wurzel der Gleichungen $f(s)_{ik} = 0$, ohne dass die Darstellbarkeit der beiden gegebenen Formen durch die Quadrate derselben n realen linearen Functionen von $x_1, .., x_n$ verloren geht, wie Weierstrass a. a. O. bewiesen hat.

Anmerkung. Wenn die beliebige quadratische Form ψ durch n Quadrate insbesondere mittelst einer orthogonalen Substitution dargestellt werden soll, welche die Form $\varphi = x_1^2 + x_2^2 + .. + x_n^2$ in $y_1^2 + .. + y_n^2$ verwandelt, so hat die zu diesem Zwecke aufzulösende Gleichung $f(s) = 0$ nur reale Wurzeln, welche aber nicht nothwendig alle von einander verschieden sind. Auf einer solchen Transformation beruht namentlich die Bestimmung der Hauptaxen von Linien und Flächen zweiten Grades, der mechanischen Hauptaxen eines gegebenen Körpers, der säcularen Störungen von Planeten (Laplace Mém. de Paris 1772. II p. 293 und 362). Die dabei eintretende Realität der Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ wurde für den dritten Grad von Lagrange (Mém. de Berlin 1773 p. 108) bewiesen, allgemein von Cauchy und Jacobi a. a. O.; auf einem neuen und directen Wege für den dritten Grad von Kummer (Crelle J. 26 p. 268. Vergl. Jacobi Crelle J. 30 p. 46), allgemein von Borchardt Liouv. J. 12 p. 50. Dieselbe Eigenschaft der Gleichung $f(s) = 0$ erkennt man nach Sylvester (Philos. Mag. 1852, II p. 138) durch Entwickelung des Products $f(s) f(-s)$, welches für imaginäre Werthe von s durchaus positiv bleibt (vergl. 9). Die neuesten hierzu gehörigen Arbeiten findet man in Christoffel's Abhandlung angeführt.

§. 15. Die Dreiecksfläche und das Tetraedervolum.

1. Wenn O den Anfang beliebiger coordinirter Axen bedeutet, wenn x, y und x_1, y_2 die mit den Axen parallelen Coordinaten der Punkte A und B sind und die Geraden, auf denen OA und OB liegen, wie die Strecken selbst durch r, r_1 bezeichnet werden, wenn ferner die Dreiecksfläche OAB positiv oder negativ genommen wird, je nachdem der Sinn der Drehung, welcher durch die Ordnung der Punkte O, A, B bestimmt ist, mit dem positiven Sinn der Ebene, in welchem positive Winkel derselben beschrieben werden, übereinstimmt oder nicht, so ist*)

$$2\,OAB = r r_1 \sin r r_1 = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \sin xy\,.$$

Beweis. Es ergiebt sich unmittelbar aus der über das Zeichen der Dreiecksfläche gemachten Voraussetzung, dass $r r_1 \sin r r_1$ auch dem Zeichen nach mit $2\,OAB$ übereinstimmt. Man hat aber (§. 3, 4)

$$r^2 r_1^2 \sin^2 r r_1 = \begin{vmatrix} r r & r r_1 \cos r r_1 \\ r r_1 \cos r r_1 & r_1 r_1 \end{vmatrix}.$$

Nun ergiebt sich durch orthogonale Projection

$$\begin{aligned} r \cos xr &= x + y \cos xy \\ r \cos yr &= x \cos xy + y \\ r &= x \cos xr + y \cos yr \end{aligned}$$

$$r r_1 \cos r r_1 = x_1 r \cos xr + y_1 r \cos yr = x r_1 \cos x r_1 + y r_1 \cos y r_1\,.$$

Nach der Multiplicationsregel (§. 5, 1) ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} x r \cos xr + y r \cos yr & x r_1 \cos x r_1 + y r_1 \cos y r_1 \\ x_1 r \cos xr + y_1 r \cos yr & x_1 r_1 \cos x r_1 + y_1 r_1 \cos y r_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r \cos xr & r \cos yr \\ r_1 \cos x r_1 & r_1 \cos y r_1 \end{vmatrix}$$

---

*) Diese Formel ist in einem Theorem Varignon's (Mém. de Paris 1719 p. 66) enthalten. In der gegenwärtigen Gestalt kommt sie bei Monge vor (J. de l'école polyt. Cah. 15 p. 68), und liegt der Formel für die Fläche eines Polygons zu Grunde, welche Gauss in den Zusätzen zu Schumacher's Uebersetzung von Carnot géom. de position gegeben hat. Eine genaue geometrische Ableitung derselben und die Bestimmung der Zeichen findet man in Möbius Statik §. 35.

und ebenso

$$\begin{vmatrix} r\cos xr & r\cos yr \\ r_1\cos xr_1 & r_1\cos yr_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy \\ \cos xy & 1 \end{vmatrix}.$$

Daher findet man, wenn ε entweder 1 oder -1 ist,

$$rr_1 \sin rr_1 = \varepsilon \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \sin xy .$$

Wenn y und x_1 verschwinden, so geht r in x, r_1 in y_1 über, Demnach ist $\varepsilon = 1$.

Anmerkung. Wenn der Punkt B dem Punkte A unendlich nahe liegt, so ist

$$r_1 = r + dr, \quad x_1 = x + dx, \quad y_1 = y + dy .$$

Indem man den Winkel xr durch ϑ bezeichnet, erhält man

$$2\,OAB = r^2 d\vartheta = \begin{vmatrix} x & y \\ x+dx & y+dy \end{vmatrix} \sin xy = \begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} \sin xy$$

durch Anwendung von §. 3, 6.

2. Wenn das Volum des Tetraeders $OABC$ durch die Kanten OA, OB, OC und deren Winkel unzweideutig ausgedrückt werden soll, so bestimme man willkürlich die positiven Richtungen der Geraden x, y, z, auf denen die Kanten OA, OB, OC liegen, und demgemäss die Zeichen dieser Kanten; ferner bestimme man willkürlich die positive Richtung der Normale z' der Ebene xy, und demgemäss den positiven Sinn dieser Ebene. Dann ist auch dem Zeichen nach

$$2\,OAB = OA\,.\,OB \sin xy ,$$

und der Abstand der Spitze C von der Ebene der Fläche OAB

$$OC \cos zz' ,$$

folglich*)

$$6\,OABC = OA\,.\,OB\,.\,OC \sin xy \cos zz' .$$

Wenn zur positiven Richtung von x oder y die entgegengesetzte gewählt wird, so wechseln OA oder OB und $\sin xy$ das Zeichen. Wenn zur positiven Richtung von z die entgegengesetzte gewählt wird, so wechseln OC und $\cos zz'$ das Zeichen.

*) Vergl. Möbius Statik §. 63 und des Verf. Elem. d. Math. 6tes Buch §. 6, 14.

Wenn zur positiven Richtung von z' die entgegengesetzte gewählt wird, so wechseln $\sin xy$ und $\cos zz'$ das Zeichen. Bei jeder Wahl erhält also $OA \,.\, OB \,.\, OC \sin xy \cos zz'$ dasselbe Zeichen.

In gleicher Weise findet man

$$6\,OBAC = OA \,.\, OB \,.\, OC \sin yx \cos zz' \,.$$

Nun ist $\sin yx = -\sin xy$, folglich $OBAC = -OABC$, u. s. w.

3. Der goniometrische Factor, mit welchem das Product der an einer Ecke des Tetraeders liegenden Kanten multiplicirt werden muss, damit man das 6fache Volum des Tetraeders erhält, wird nach v. Staudt (Crelle J. 24 p. 252) der Sinus der Ecke genannt und durch $\sin xyz$ bezeichnet, wenn die Kanten auf den Geraden x, y, z liegen. Nun ist

$$\sin xyz = \sin xy \sin xy\hat{\ }z = \sin xy \sin yz \sin xy\hat{\ }yz\,,$$

wenn $xy\hat{\ }z$ und $xy\hat{\ }yz$ die mit der Ebene xy von der Geraden z und von der Ebene yz gebildeten Winkel bedeuten. In Folge der Gleichung

$$\cos zx - \cos xy \cos yz = \sin xy \sin yz \cos xy\hat{\ }yz$$

findet man*)

$$\sin^2 xyz = \sin^2 xy \sin^2 yz - (\cos zx - \cos xy \cos yz)^2$$

$$= 1 - \cos^2 xy - \cos^2 yz - \cos^2 zx + 2\cos xy \cos yz \cos zx$$

$$= 4 \sin\frac{xy + xz + yz}{2} \sin\frac{-xy + xz + yz}{2} \sin\frac{xy - xz + yz}{2} \sin\frac{xy + xz - yz}{2}\,.$$

Nach §. 3, 17 hat man zugleich

$$\sin^2 xyz = \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix}$$

analog der Gleichung

$$\sin^2 xy = \begin{vmatrix} 1 & \cos xy \\ \cos xy & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Wenn O den Anfang beliebiger coordinirter Axen bedeutet, wenn x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 die Coordinaten

*) Euler Nov. Comm. Petrop. 4 p. 158.

der Punkte A, B, C bedeuten und die Geraden, auf denen OA, OB, OC liegen, wie diese Strecken selbst durch r, r_1, r_2 bezeichnet werden, so ist auch dem Zeichen nach *)

$$6\,OABC = r\,r_1\,r_2 \sin r\,r_1\,r_2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \sin xyz\,.$$

Beweis. Nach (3) ist

$$r^2 r_1^2 r_2^2 \sin^2 r\,r_1\,r_2 = \begin{vmatrix} r\,r & r\,r_1 \cos r\,r_1 & r\,r_2 \cos r\,r_2 \\ r\,r_1 \cos r\,r_1 & r_1\,r_1 & r_1\,r_2 \cos r_1\,r_2 \\ r\,r_2 \cos r\,r_2 & r_1\,r_2 \cos r_1\,r_2 & r_2\,r_2 \end{vmatrix}.$$

Durch orthogonale Projection ergiebt sich aber

$$\begin{aligned}
r \cos xr &= x + y \cos xy + z \cos xz \\
r \cos yr &= x \cos xy + y + z \cos yz \\
r \cos zr &= x \cos xz + y \cos yz + z \\
r &= x \cos xr + y \cos yr + z \cos zr \\
r\,r_1 \cos r\,r_1 &= x_1 r \cos xr + y_1 r \cos yr + z_1 r \cos zr \\
&= x r_1 \cos x r_1 + y r_1 \cos y r_1 + z r_1 \cos z r_1
\end{aligned}$$

u. s. w. Demnach erhält man durch Anwendung von §. 5, 1 statt der obigen Determinante das Product

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r \cos xr & r \cos yr & r \cos zr \\ r_1 \cos x r_1 & r_1 \cos y r_1 & r_1 \cos z r_1 \\ r_2 \cos x r_2 & r_2 \cos y r_2 & r_2 \cos z r_2 \end{vmatrix}$$

und ebenso

$$\begin{vmatrix} r \cos xr & r \cos yr & r \cos zr \\ r_1 \cos x r_1 & r_1 \cos y r_1 & r_1 \cos z r_1 \\ r_2 \cos x r_2 & r_2 \cos y r_2 & r_2 \cos z r_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix}.$$

Daher ist, wenn ε entweder 1 oder -1 bedeutet,

$$r\,r_1\,r_2 \sin r\,r_1\,r_2 = \varepsilon \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \sin xyz\,.$$

*) Lagrange sur les pyr. 14 (Mém. de l'acad. de Berlin 1773 p. 149). Monge l. c. Möbius l. c.

Wenn unter den Coordinaten der in Betracht gezogenen Punkte nur x, y_1, z_2 von Null verschieden sind, während die übrigen verschwinden, so fällt r mit x, r_1 mit y, r_2 mit z zusammen und von der Determinante bleibt nur das Anfangsglied übrig (§. 2, 7). Demnach ist $\varepsilon = 1$.

Anmerkung. Vermöge der Sätze (1) und (4) können die einfachsten der in §. 3, 11 aufgestellten Identitäten geometrisch gedeutet werden.

5. Wenn die Punkte A, B, C in Bezug auf zwei Axen der Ebene ABC durch die Coordinaten x, y: x_1, y_1; x_2, y_2 gegeben sind, so ist*)

$$2\,ABC = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \sin xy\,.$$

Beweis. In Bezug auf ein durch den Anfang A gelegtes System von Axen, welche mit gegebenen Axen einerlei Richtung haben, sind $x_1 - x$, $y_1 - y$; $x_2 - x$, $y_2 - y$ die Coordinaten von B und C, daher ist (1)

$$2\,ABC = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix} \sin xy\,.$$

Durch Anwendung von §. 2, 6 und §. 3, 6 erhält man statt dieser Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x - x & y - y \\ 1 & x_1 - x & y_1 - y \\ 1 & x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Anmerkung. So oft man in der Formel ABC zwei Buchstaben permutirt, so vielmal wechselt die Dreiecksfläche das Zeichen. In der That erleidet die Determinante der Coordinaten durch Permutation von zwei Zeilen einen Zeichenwechsel (§. 2, 4). Durch Entwickelung der Determinante erhält man die bekannte Identität $ABC = OBC + OCA + OAB$.

Als Bedingung dafür, dass A auf der Geraden BC liegt,

*) Diese bekannte Formel und die entsprechende des folg. Art. kommt in dieser Gestalt bei Cayley Cambr. math. J. 2 p. 268, Joachimsthal Crelle J. 40 p. 23 u. A. vor.

d. h. als Gleichung der Geraden durch B und C ergiebt sich, weil $ABC = 0$,

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

6. Wenn die Punkte A, B, C, D in Bezug auf drei Axen durch die Coordinaten x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 gegeben sind, so ist

$$6\,ABCD = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \sin xyz .$$

Beweis. Legt man durch A ein System von Axen, welche mit den gegebenen Axen einerlei Richtung haben, so sind in Bezug auf dieselben $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$; $x_2 - x$, $y_2 - y$, $z_2 - z$; u. s. w. die Coordinaten von B, C, D, daher ist (4)

$$6\,ABCD = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix} \sin xyz .$$

Durch Transformation der Determinante erhält man

$$\begin{vmatrix} 1 & x - x & y - y & z - z \\ 1 & x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ 1 & x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ 1 & x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} .$$

Anmerkung. So oft man in der Formel $ABCD$ zwei Buchstaben permutirt, so vielmal wechselt das Tetraedervolum zugleich mit der dafür gefundenen Determinante das Zeichen.

Unter der Bedingung $ABCD = 0$ liegt A auf der Ebene BCD, mithin ist die Gleichung der Ebene BCD

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

wovon die geometrische Bedeutung unmittelbar wahrzunehmen ist.

7. Die Lage des Punktes P in Bezug auf das Tetraeder $OABC$ ist durch die Tetraederverhältnisse

$$OBCP : OCAP : OABP : OABC = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : 1$$

bestimmt *). Sind nämlich in Bezug auf drei durch O gehende Axen $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x, y, z$ die Coordinaten von A, B, C, P, so hat man (4)

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mu_1 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \mu_1 V,$$

u. s. w. Wenn man diese Gleichungen entwickelt und die Coefficienten von $x_1, y_1, z_1, ..$ in der Determinante V durch $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, ..$ bezeichnet, so findet man

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} \xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z &= \mu_1 V \\ \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z &= \mu_2 V \\ \xi_3 x + \eta_3 y + \zeta_3 z &= \mu_3 V. \end{aligned}$$

Nun ist (§. 3, 3)

$$\begin{aligned} x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 &= V \\ x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 + x_3 \eta_3 &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. Folglich

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} x &= \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 \\ y &= \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 \\ z &= \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Verhältnisses $PABC : OABC = \mu$ entwickele man

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

*) Lagrange sur les pyr. 28.

d. h. (6 und 4)

$$PABC = OABC - OBCP - OCAP - OABP,$$

$$\text{(III)} \qquad \mu = 1 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 .$$

Aus (II) und (III) folgt, wenn a, b, c, d beliebige Grössen sind,

$$a + bx + cy + dz = \mu a + \mu_1(a + bx_1 + cy_1 + dz_1)$$
$$+ \mu_2(a + bx_2 + cy_2 + dz_2)$$
$$+ \mu_3(a + bx_3 + cy_3 + dz_3) .$$

Um die geometrische Bedeutung dieser Gleichung zu finden, stelle man die Ebene vor, deren Gleichung $a + bx' + cy' + dz' = 0$ ist. Wird diese Ebene von den Parallelen zu z durch P, O, A, B, C in P', O', A', B', C' geschnitten und hat P' die Coordinaten x, y, z', so ist

$$a + bx + cy + dz' = 0$$

$$a + bx + cy + dz = d(z - z') = d \, . \, P'P ,$$

u. s. w. Folglich ist *)

$$\text{(IV)} \qquad P'P = \mu \, . \, O'O + \mu_1 \, . \, A'A + \mu_2 \, . \, B'B + \mu_3 \, . \, C'C ,$$

wobei unter P', O', A', B', C' die Durchschnitte irgend einer Schaar von Parallelen, die man durch P, O, A, B, C gezogen hat, mit einer beliebigen Ebene verstanden werden können. Demnach erscheint P als Schwerpunkt der in O, A, B, C befindlichen Massen μ, μ_1, μ_2, μ_3, deren Summe $= 1$.

8. Sind A_1, B_1, C_1 die Mitten von OA, OB, OC, so wird das Tetraeder $OABC$ von den Ebenen A_1BC, AB_1C, ABC_1 halbirt, und der Schwerpunkt P des Tetraeders $OABC$ liegt auf den genannten Halbirungsebenen, so dass

$$A_1BCP = 0 , \quad AB_1CP = 0 , \quad ABC_1P = 0 .$$

Weil A_1 die Coordinaten $\frac{1}{2}x_1$, $\frac{1}{2}y_1$, $\frac{1}{2}z_1$ hat, so ist (6) nach den vorigen Bezeichnungen

---

*) Feuerbach Untersuchung der dreieckigen Pyramide p. 5. Möbius baryc. Calc. cap. 4. Die Grössen μ, μ_1, μ_2, μ_3 sind die barycentrischen Coordinaten (coordinirten Coefficienten) des Punktes P in Bezug auf die Fundamentalpyramide $OABC$ bei Möbius und Feuerbach.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}x_1 & \frac{1}{2}y_1 & \frac{1}{2}z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

u. s. w. Folglich

$$\begin{aligned} 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 &= 1 \\ \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 &= 1 \\ \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

Hieraus findet man

$$\mu_1 - \mu_2 = 0\,, \quad \mu_1 - \mu_3 = 0\,, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \tfrac{1}{4}\,,$$

folglich $\mu = \frac{1}{4}$ und

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4}\,, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4}\,, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4}\,,$$

d. h. der Schwerpunkt des Tetraeders ist die Spitze von 4 gleichen Tetraedern, deren Basen die Flächen des Tetraeders sind, und der Schwerpunkt von 4 gleichen Massen, welche in den Ecken des Tetraeders ihre Schwerpunkte haben *).

9. Wenn die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks in Bezug auf ein System von zwei Axen gegeben sind, so findet man die Fläche des Dreiecks auf folgende Weise **). Die Coordinaten der Seiten seien $a : b : c$, $a_1 : b_1 : c_1$, $a_2 : b_2 : c_2$, d. h. für jeden Punkt der ersten Seite, dessen Coordinaten x', y' sind, hat man $a + bx' + cy' = 0$ u. s. w. Die Coordinaten der Eckpunkte x, y; x_1, y_1; x_2, y_2 nebst 3 Hülfsgrössen p, p_1, p_2 sind durch die Gleichungen

$$\begin{array}{lll} a + b\,x + c\,y = p & a + b\,x_1 + c\,y_1 = 0 & a + b\,x_2 + c\,y_2 = 0 \\ a_1 + b_1 x + c_1 y = 0 & a_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1 = p_1 & a_1 + b_1 x_2 + c_1 y_2 = 0 \\ a_1 + b_2 x + c_2 y = 0 & a_2 + b_2 x_1 + c_2 y_1 = 0 & a_2 + b_2 x_2 + c_2 y_2 = p_2 \end{array}$$

bestimmt, welche ausdrücken, dass der Punkt (x, y) auf der zweiten und dritten, aber nicht auf der ersten Geraden liegt, u. s. w. Nach §. 5, 1 ist

---

*) Lagrange sur les pyr. 31—35.

**) Joachimsthal Crelle J. 40 p. 23. Zu demselben Resultat und dem entsprechenden des folg. Art. war auf einem andern Wege Minding Crelle J. 5 p. 397 gelangt.

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Aus den 3 ersten Gleichungen folgt (§. 8, 3. §. 3, 5)

$$\begin{vmatrix} a-p & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & b & c \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$R - p\alpha = 0\,,$$

wenn die Determinante der Liniencoordinaten durch R und der Coefficient des Elements a in R durch α bezeichnet wird. Analog hat man

$$R - p_1\alpha_1 = 0\,, \qquad R - p_2\alpha_2 = 0\,.$$

Daher ist (§. 2, 7)

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{vmatrix} = pp_1p_2 = \frac{R^3}{\alpha\alpha_1\alpha_2}\,, \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{R^2}{\alpha\alpha_1\alpha_2}\,,$$

mithin (5) die gesuchte doppelte Dreiecksfläche $= \dfrac{R^2 \sin xy}{\alpha\alpha_1\alpha_2}$.

Nachdem man auf bekannte Weise die Höhen des Dreiecks, d. h. die Abstände der Punkte (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) von der ersten, zweiten, dritten Geraden berechnet hat, findet man die Seiten des Dreiecks, wenn man die gefundene doppelte Dreiecksfläche durch die Höhen dividirt.

Wenn die Determinante der Liniencoordinaten verschwindet, ohne dass die Elemente einer Zeile zu einander der Reihe nach sich verhalten, wie die Elemente einer andern Zeile, so gehen die 3 Geraden durch einen endlich fernen Punkt.

10. Wenn die Gleichungen der Flächen eines Tetraeders in Bezug auf ein System von 3 Axen gegeben sind, so wird das Volum des Tetraeders auf dieselbe Weise gefunden, wie die Dreiecksfläche aus den Seiten *). Die Coordinaten der Flächen seien $a:b:c:d$, $a_1:b_1:c_1:d_1$, $a_2:b_2:c_2:d_2$, $a_3:b_3:c_3:d_3$, d. h. für jeden Punkt (x', y', z') der ersten Fläche hat man $a + bx' + cy' + dz' = 0$ u. s. w. Die Coordinaten der Eck-

*) Joachimsthal l. c.

punkte x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 nebst den Hülfsgrössen p, p_1, p_2, p_3 sind durch 4 Systeme von je 4 Gleichungen

$$\begin{aligned} a + b\,x + c\,y + d\,z &= p \\ a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z &= 0 \\ a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z &= 0 \\ a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. bestimmt, welche ausdrücken, dass der Punkt (x, y, z) auf der zweiten, dritten, vierten, aber nicht auf der ersten Ebene liegt, u. s. w. Nach §. 5, 1 ist

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Aus dem ersten System von 4 Gleichungen folgt

$$\begin{vmatrix} a-p & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0, \quad R - p\alpha = 0,$$

wenn R die Determinante der Flächencoordinaten und α der Coefficient ist, welchen a in R hat. Analog ist

$$R - p_1\alpha_1 = 0, \quad R - p_2\alpha_2 = 0, \quad R - p_3\alpha_3 = 0,$$

folglich

$$p p_1 p_2 p_3 = \frac{R^4}{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{R^3}{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3},$$

und das gesuchte 6fache Tetraedervolum (6) $= \frac{R^3 \sin x\,y\,z}{\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$. Hieraus lassen sich mit Hülfe der Höhen des Tetraeders seine Flächen berechnen.

Wenn die Determinante der Flächencoordinaten verschwindet, ohne dass zwei Zeilen proportionale Elemente enthalten, so gehen die 4 Ebenen durch einen endlich fernen Punkt.

§. 16. Producte von Dreiecksflächen und Tetraedervolumen.

1. Wenn x, y, r, r_1 beliebige Richtungen einer Ebene sind und wie gewöhnlich Winkel von einerlei Zeichen durch Drehungen von einerlei Sinn beschrieben werden, so ist

$$\sin xy \sin rr_1 = \begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 \end{vmatrix}.$$

Beweis. Ohne die Winkel zu verändern, kann man die gegebenen Richtungen durch einen Punkt O legen. Schneidet man auf den Richtungen r, r_1 die Strecken $OA = r$, $OB = r_1$ ab und sind x, y; x_1, y_1 die Coordinaten der Punkte A, B in Bezug auf die Axen x, y, so ist (§. 15, 1)

$$rr_1 \sin xy \sin rr_1 = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy \\ \cos xy & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} r \cos xr & r \cos yr \\ r_1 \cos xr_1 & r_1 \cos yr_1 \end{vmatrix},$$

woraus nach Division durch rr_1 die Behauptung folgt.

2. Wenn die Dreiecke AA_1A_2 und BB_1B_2 auf einer Ebene liegen, und das Product der Strecken AA_i, BB_k mit dem Cosinus des Winkels ihrer Geraden durch c_{ik} bezeichnet wird, so ist

$$4\, AA_1A_2 \,.\, BB_1B_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Beweis. Setzt man $AA_1 = x$, $AA_2 = y$, $BB_1 = r$, $BB_2 = r_1$, so erhält man (1)

$$4\, AA_1A_2 \,.\, BB_1B_2 = xyrr_1 \sin xy \sin rr_1$$

$$= \begin{vmatrix} xr \cos xr & yr \cos yr \\ xr_1 \cos xr_1 & yr_1 \cos yr_1 \end{vmatrix}.$$

Um das Product c_{ik} zu berechnen, bestimme man willkürlich die positiven Richtungen der Geraden, auf denen AA_i und BB_k liegen, und demgemäss die Werthe und Zeichen der Strecken und des Cosinus. Wenn als positive Richtung einer Geraden die entgegengesetzte angenommen wird, so wechseln eine Strecke und der Cosinus das Zeichen. Also erhält bei jeder Wahl das Product c_{ik} dasselbe Zeichen.

3. Wenn die Ebenen der Dreiecke AA_1A_2 und BB_1B_2 den Winkel φ bilden, so ist nach der angenommenen Bezeichnung

$$4\, AA_1A_2 \, . \, BB_1B_2 \cos\varphi = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} .$$

Beweis. Ist NN_1N_2 die orthogonale Projection von BB_1B_2 auf die Ebene AA_1A_2, so lässt sich der vorige Lehrsatz auf das Product $4\, AA_1A_2 \, . \, NN_1N_2$ anwenden. Dabei ist einerseits $NN_1N_2 = BB_1B_2 \, . \cos\varphi$, und andrerseits hat man, indem man die Geraden, auf welchen die Strecken AA_1, BB_1, NN_1 liegen, durch a, b, n bezeichnet,

$$AA_1 \, . \, NN_1 \cos an = AA_1 \, . \, BB_1 \cos ab$$

u. s. w., weil die orthogonalen Projectionen von NN_1 und BB_1 auf die Gerade a von einander nicht verschieden sind.

Das Product $4\, AA_1A_2 \, . \, BB_1B_2 \cos\varphi$ ist eben so wenig zweideutig, als die dafür gefundene Determinante. Nach beliebiger Annahme des positiven Sinnes in jeder von beiden Ebenen, d. h. des Sinnes der Drehungen, durch welche positive Winkel und Flächen beschrieben werden, hat man die Zeichen der Dreiecke AA_1A_2 und BB_1B_2 zu bestimmen und dann unter φ den Winkel (oder den entgegengesetzten) zu verstehen, welchen die eine Ebene beschreiben muss, damit positive Dreiecke beider Ebenen einerlei Sinnes werden. Wenn man den positiven Sinn einer Ebene ändert, so erleiden zwei Factoren des obigen Products Zeichenwechsel, nämlich ein Dreieck und $\cos\varphi$, weil φ sich um 180^0 ändert; also bleibt das Product unverändert.

4. Wenn x, y, r, r_1 beliebige Richtungen des Raumes sind, so ist *)

$$\sin xy \sin rr_1 \cos xy\hat{\ } rr_1 = \begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 \end{vmatrix} .$$

Beweis. Legt man die gegebenen Richtungen durch einen Punkt O und schneidet auf ihnen die Strecken $OC = x$, $OD = y$, $OE = r$, $OF = r_1$ ab, so erhält man (3)

*) Dieser Satz, welcher die vorigen von v. Staudt gefundenen Sätze in sich schliesst, ist zuerst von Gauss disqu. gen. circa superf. 2, VI aufgestellt, dann von v. Staudt Crelle J. 24 p. 252, zuletzt von Cauchy Exerc. d'Anal. 4 p. 41 reproducirt worden.

$$x y r r_1 \sin x y \sin r r_1 \cos x y \hat{} r r_1 = \begin{vmatrix} x r \cos x r & y r \cos y r \\ x r_1 \cos x r_1 & y r_1 \cos y r_1 \end{vmatrix}$$

woraus nach Weglassung der Factoren $x y r r_1$ die Behauptung folgt.

Anmerkung. Um die Gültigkeit desselben Satzes für 4 beliebige Ebenen nachzuweisen*), hat man den gefundenen Satz auf die positiven Normalen derselben anzuwenden, oder was dasselbe ist, auf die Polarfigur des vorhin erwähnten Vierecks $CDEF$, wenn das letztere als auf einer um das Centrum O beschriebenen Kugel liegend vorgestellt wird. Diese Kugel wird von dem in willkürlich bestimmter Richtung genommenen Durchschnitt der Ebenen in einem Punkte, von jeder Ebene in einem Hauptkreise von willkürlich bestimmtem Sinne geschnitten, ohne dass das Product, dessen Werth durch die Determinante angegeben wird, einer Zweideutigkeit ausgesetzt ist.

5. Wenn man 4 Gerade des Raumes durch a, b, c, d, und die Ebenen ad, bd, cd, bc, ca, ab der Reihe nach durch $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bezeichnet, so folgt aus den Gleichungen (4)

$$\sin ab \sin cd \cos \gamma\gamma_1 = \cos ac \cos bd - \cos bc \cos ad$$
$$\sin bc \sin ad \cos \alpha\alpha_1 = \cos ba \cos cd - \cos ca \cos bd$$
$$\sin ca \sin bd \cos \beta\beta_1 = \cos cb \cos ad - \cos ab \cos cd$$

durch Addition

$$\text{I} \quad \sin ab \sin cd \cos \gamma\gamma_1 + \sin bc \sin ad \cos \alpha\alpha_1 + \sin ca \sin bd \cos \beta\beta_1 = 0 ,$$

weil $\cos ba = \cos ab$ u. s. w. Man bestimmt willkürlich den positiven Sinn jeder Ebene u. s. w. Dieselbe Gleichung gilt für 4 Ebenen a, b, c, d, indem man die Geraden $ad, \ldots$ durch $\alpha, \ldots$ bezeichnet**). In diesem Falle bestimmt man willkürlich die positiven Richtungen der Geraden, und demgemäss durch Drehungen von einerlei Sinn die Flächenwinkel, deren Kanten die Geraden sind.

Ebenso gilt für 4 Punkte A, B, C, D die Gleichung***)

$$\text{II} \quad AB \cdot CD \cos \gamma\gamma_1 + BC \cdot AD \cos \alpha\alpha_1 + CA \cdot BD \cos \beta\beta_1 = 0 ,$$

---

*) Einen analytischen Beweis dieses polaren Zusatzes hat Joachimsthal l. c. p. 44 gegeben.

**) Joachimsthal l. c.

***) Carnot mém. sur la relation qui existe etc. 27.

wenn AD, BD, CD, BC, CA, AB Strecken der Geraden α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 bedeuten. Man hat nämlich durch Projection

$$\begin{aligned} AB \cos\gamma\gamma_1 &= AD\cos\alpha\gamma + DB\cos\beta\gamma \\ BC\cos\alpha\alpha_1 &= BD\cos\beta\alpha + DC\cos\gamma\alpha \\ CA\cos\beta\beta_1 &= CD\cos\gamma\beta + DA\cos\alpha\beta\,. \end{aligned}$$

Indem man diese Gleichungen der Reihe nach mit CD, AD, BD multiplicirt und summirt, erhält man die angegebene Relation, weil $AD = -DA$.

Man bezeichne die Ebenen, auf welchen die Flächen des Tetraeders ABC, ACD, CBD, BAD liegen, der Reihe nach durch d, b, a, c, und daher die Geraden, auf denen die Kanten AB, BC, .. liegen, durch cd, ad, ... Dann ist auch dem Zeichen nach (3)

$$\begin{aligned} 6\,ABCD\,.\,CA &= AB\,.\,AC\,.\,CA\,.\,AD \sin cd^{\wedge}bd \sin bd^{\wedge}bc \sin db \\ &= 4\,ABC\,.\,ACD \sin bd\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6\,BADC\,.\,BD &= BA\,.\,BD\,.\,BD\,.\,BC \sin cd^{\wedge}ca \sin ca\ ad \sin ca \\ &= 4\,BAD\,.\,BDC \sin ca\,. \end{aligned}$$

Nun ist $BADC = ABCD$, $BDC = CBD$, also erhält man durch Multiplication, wenn man das Product der Flächen des Tetraeders durch P bezeichnet,

$$9\,ABCD^2\,.\,CA\,.\,BD = 4\,P \sin ca \sin bd\,,$$

und daher *)

$$\text{III)} \quad \frac{9\,ABCD^2}{4\,P} = \frac{\sin ca \sin bd}{CA\,.\,BD} = \frac{\sin ab \sin cd}{AB\,.\,CD} = \frac{\sin bc \sin ad}{BC\,.\,AD}\,.$$

Hieraus erhellt, wie von den Gleichungen (I) und (II) eine aus der andern abgeleitet werden kann.

6. Wenn x, y, z, r, r_1, r_2 beliebige Richtungen im Raume sind, so ist **)

$$\sin xyz \sin rr_1r_2 = \begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr & \cos zr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 & \cos zr_1 \\ \cos xr_2 & \cos yr_2 & \cos zr_2 \end{vmatrix}\,.$$

---

*) Bretschneider Geometrie §. 677.

**) v. Staudt l. c. Der besondere Fall, in welchem das System x, y, z orthogonal, also $\sin xyz = \pm 1$ ist, kommt früher bei Gauss l. c. vor.

Beweis. Legt man die gegebenen Richtungen durch einen Punkt O und schneidet auf denselben die Strecken $OA = r$, $OB = r_1$, $OC = r_2$ ab und sind $x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ die Coordinaten der Punkte A, B, C in Bezug auf die Axen x, y, z, so ist (§. 15, 4)

$$r r_1 r_2 \sin xyz \sin r r_1 r_2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} r \cos xr & r \cos yr & r \cos zr \\ r_1 \cos x r_1 & r_1 \cos y r_1 & r_1 \cos z r_1 \\ r_2 \cos x r_2 & r_2 \cos y r_2 & r_2 \cos z r_2 \end{vmatrix}$$

woraus durch Weglassung der Factoren $r r_1 r_2$ die Behauptung folgt.

7. Wenn c_{ik} das oben (2) angegebene Streckenproduct bedeutet, so ist *)

$$36\, AA_1A_2A_3 \,.\, BB_1B_2B_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix} .$$

Beweis. Setzt man

$$AA_1 = x\,, \quad AA_2 = y\,, \quad AA_3 = z\,,$$
$$BB_1 = r\,, \quad BB_2 = r_1\,, \quad BB_3 = r_2\,,$$

so erhält man (6)

$$36\, AA_1A_2A_3 \,.\, BB_1B_2B_3 = xyz\, r r_1 r_2 \sin xyz \sin r r_1 r_2$$

$$= \begin{vmatrix} xr \cos xr & yr \cos yr & zr \cos zr \\ x r_1 \cos x r_1 & y r_1 \cos y r_1 & z r_1 \cos z r_1 \\ x r_2 \cos x r_2 & y r_2 \cos y r_2 & z r_2 \cos z r_2 \end{vmatrix} .$$

8. Die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr \\ \cos x r_1 & \cos y r_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr & \cos zr \\ \cos x r_1 & \cos y r_1 & \cos z r_1 \\ \cos x r_2 & \cos y r_2 & \cos z r_2 \end{vmatrix}$$

haben zufolge der in (1, 4. 6) dafür gefundenen Werthe die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie unverändert bleiben,

*) v. STAUDT l. c. In dem Falle, dass das zweite Tetraeder vom ersten nicht verschieden, also $c_{ik} = c_{ki}$ ist, erhält man die Formel LAGRANGE's (sur les pyr. 15) und LEGENDRE's (Elém. de géom. Note V, 7).

wenn die gegenseitige Lage einerseits der Winkel xy, rr_1, andererseits der Raumwinkel xyz, rr_1r_2 beliebig verändert wird, so lange im ersten Falle auch der Flächenwinkel $xy\hat{}rr_1$ seine Grösse behält*).

9. Mit Hülfe der Gleichung (6) lässt sich der Abstand von zwei Geraden im Raume, deren Lage in Bezug auf ein beliebiges System x, y, z gegeben ist, berechnen. Sind x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 die Coordinaten der Punkte A, B, welche auf den Geraden r_1, r_2 liegen; sind die Richtungen der Geraden durch ihre Winkel mit den Axen gegeben, so dass der Winkel r_1r_2 berechnet werden kann; ist r die Strecke AB, deren Coordinaten $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ sind, und d der gesuchte Abstand der Geraden r_1, r_2; zieht man endlich $AC = 1$ in der Richtung r_2 und $AA' = 1$ auf der Geraden r_1, so ist

$$6\,AA'CB = d \sin r_1 r_2 = r \sin r r_1 r_2\,,$$

folglich

$$d \sin xyz \sin r_1 r_2 = \begin{vmatrix} r\cos xr & r\cos yr & r\cos zr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 & \cos zr_1 \\ \cos xr_2 & \cos yr_2 & \cos zr_2 \end{vmatrix},$$

worin

$$\begin{aligned} r\cos xr &= (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)\cos xy + (z_2 - z_1)\cos xz \\ r\cos yr &= (x_2 - x_1)\cos xy + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)\cos yz \\ r\cos zr &= (x_2 - x_1)\cos xz + (y_2 - y_1)\cos yz + (z_2 - z_1)\,. \end{aligned}$$

Die Entwickelung giebt**)

$$\begin{aligned} d \sin xyz \sin r_1 r_2 = \;& (\alpha + \beta\cos xy + \gamma\cos xz)(x_2 - x_1) \\ &+ (\alpha\cos xy + \beta + \gamma\cos yz)(y_2 - y_1) \\ &+ (\alpha\cos xz + \beta\cos yz + \gamma)(z_2 - z_1)\,, \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung

$$\alpha = \begin{vmatrix} \cos yr_1 & \cos zr_1 \\ \cos yr_2 & \cos zr_2 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} \cos zr_1 & \cos xr_1 \\ \cos zr_2 & \cos xr_2 \end{vmatrix},$$

$$\gamma = \begin{vmatrix} \cos xr_1 & \cos yr_1 \\ \cos xr_2 & \cos yr_2 \end{vmatrix}$$

gesetzt wird.

---

*) Cauchy Exerc. d'anal. 4 p. 51.

**) Cauchy leçons sur les appl. du calc. inf. Prélim (102).

10. Für 3 Richtungen einer Ebene a, b, c hat man

$$(\sin ab + \sin bc + \sin ca)^2 = 8 \begin{vmatrix} 0 & \sin^2\frac{1}{2}ab & \sin^2\frac{1}{2}ac \\ \sin^2\frac{1}{2}ab & 0 & \sin^2\frac{1}{2}bc \\ \sin^2\frac{1}{2}ac & \sin^2\frac{1}{2}bc & 0 \end{vmatrix},$$

und für 4 Richtungen des Raumes (oder Ebenen) a, b, c, d

$$(\sin abd + \sin bcd + \sin cad - \sin abc)^2$$

$$= -16 \begin{vmatrix} 0 & \sin^2\frac{1}{2}ab & \sin^2\frac{1}{2}ac & \sin^2\frac{1}{2}ad \\ \sin^2\frac{1}{2}ab & 0 & \sin^2\frac{1}{2}bc & \sin^2\frac{1}{2}bd \\ \sin^2\frac{1}{2}ac & \sin^2\frac{1}{2}bc & 0 & \sin^2\frac{1}{2}cd \\ \sin^2\frac{1}{2}ad & \sin^2\frac{1}{2}bd & \sin^2\frac{1}{2}cd & 0 \end{vmatrix},$$

welche Determinanten nach §. 3, 17 entwickelt werden können *).

Beweis. Indem man zwei Axen x, y zu Hülfe nimmt, bei welchen $\sin xy = 1$ ist, erhält man (1)

$$\sin bc = \begin{vmatrix} \cos xb & \cos yb \\ \cos xc & \cos yc \end{vmatrix}$$

u. s. w., folglich (§. 3, 2)

$$\sin ab + \sin bc + \sin ca = \begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya \\ 1 & \cos xb & \cos yb \\ 1 & \cos xc & \cos yc \end{vmatrix},$$

$$-(\sin ab + \sin bc + \sin ca)^2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya \\ 1 & \cos xb & \cos yb \\ 1 & \cos xc & \cos yc \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & \cos xa & \cos ya \\ -1 & \cos xb & \cos yb \\ -1 & \cos xc & \cos yc \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man dieses Product durch $\Sigma \pm h_{11} h_{22} h_{33}$, so ist (§. 5, 1)

$$h_{11} = -1 + \cos^2 xa + \cos^2 ya = 0$$

$$h_{12} = -1 + \cos xa \cos xb + \cos ya \cos yb$$

$$= -1 + \cos ab = -2 \sin^2\tfrac{1}{2}ab$$

u. s. w. Nach Division von $\Sigma \pm h_{11} h_{22} h_{33}$ durch $(-2)^3$ erhält man die erste angegebene Gleichung.

---

*) Der plan-trigonometrische Satz ist in den Lehrbüchern anzutreffen. Der entsprechende polyedrometrische Satz ist von Joachimsthal l. c. (47) ohne genauere Angabe der Zeichen aufgestellt und bewiesen worden.

Indem man ferner drei Axen x, y, z gebraucht, bei welchen $\sin xyz = 1$ ist, erhält man (6)

$$\sin abc = \begin{vmatrix} \cos xa & \cos ya & \cos za \\ \cos xb & \cos yb & \cos zb \\ \cos xc & \cos yc & \cos zc \end{vmatrix}$$

u. s. w., folglich

$$\sin abd + \sin bcd + \sin cad - \sin abc$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya & \cos za \\ 1 & \cos xb & \cos yb & \cos zb \\ 1 & \cos xc & \cos yc & \cos zc \\ 1 & \cos xd & \cos yd & \cos zd \end{vmatrix}$$

und durch ein dem vorigen analoges Verfahren

$$-(\sin abd + \sin bcd + \sin cad - \sin abc)^2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{vmatrix},$$

worin

$$h_{11} = -1 + \cos^2 xa + \cos^2 ya + \cos^2 za = 0$$

$$h_{12} = -1 + \cos xa \cos xb + \cos ya \cos yb + \cos za \cos zb$$
$$= -1 + \cos ab = -2 \sin^2 \tfrac{1}{2} ab$$

u. s. w. Wenn man diese Determinante durch $(-2)^4$ dividirt, so erhält man die zweite angegebene Gleichung.

11. Wenn man durch a, b, c die Geraden bezeichnet, auf denen die Radien OA, OB, OC eines Kreises liegen, durch r die Länge eines Radius und durch f, g, h die Quadrate der Seiten BC, CA, AB des eingeschriebenen Dreiecks ABC; wenn man beide Seiten der ersten in (10) aufgestellten goniometrischen Gleichungen mit $8r^6$ multiplicirt und bemerkt, dass

$$r^2 \sin ab = 2\, OAB, \qquad 4r^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} ab = h,$$

u. s. w., so erhält man die altbekannte Gleichung

$$(4r \,.\, ABC)^2 = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & h & g \\ h & 0 & f \\ g & f & 0 \end{vmatrix} = fgh.$$

Wenn man durch a, b, c, d die Geraden bezeichnet, auf denen die Radien OA, OB, OC, OD einer Kugel liegen, durch r

die Länge eines Radius, durch f, g, h die Quadrate der Kanten BC, CA, AB, durch f', g', h' die Quadrate der gegenüberliegenden Kanten AD, BD, CD des jener Kugel eingeschriebenen Tetraeders $ABCD$; wenn man beide Seiten der zweiten in (10) aufgestellten Gleichung mit $16r^8$ multiplicirt und erwägt, dass

$$r^3 \sin abd = 6\,OABD\,, \qquad 4\,r^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} ab = h\,,$$

u. s. w., so erhält man

$$24\,r\,.\,ABCD^2 = -\begin{vmatrix} 0 & h & g & f' \\ h & 0 & f & g' \\ g & f & 0 & h' \\ f' & g' & h' & 0 \end{vmatrix}$$

zur Berechnung des Radius der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel aus den Kanten und dem Volum *).

12. Das öfter gebrauchte Product von zwei Strecken mit dem Cosinus des von ihren Geraden gebildeten Winkels lässt sich durch Quadrate der die Endpunkte der Strecken verbindenden Geraden ausdrücken, wodurch die Producte von Polygonen und Polyedern bemerkenswerthe Formen erhalten.

Nach den in (5, II) festgesetzten Bezeichnungen ist

$$2\,AB\,.\,CD \cos\gamma\gamma_1 = 2\,AD\,.\,CD \cos\alpha\gamma - 2\,BD\,.\,CD\cos\beta\gamma$$

Nun hat man allgemein

$$2\,AD\,.\,CD\cos\alpha\gamma = AD^2 + CD^2 - AC^2$$

$$2\,BD\,.\,CD\cos\beta\gamma = BD^2 + CD^2 - BC^2\,,$$

folglich **)

$$2\,AB\,.\,CD\cos\gamma\gamma_1 = AD^2 - BD^2 - (AC^2 - BC^2)\,.$$

13. Bezeichnet man durch d_{ik} das Quadrat der Strecke $A_i B_k$, so ist für zwei Dreiecke, deren Ebenen den Winkel φ bilden,

---

*) In diese Form ist die von Jungius (Biographie von Guhrauer 1850 p. 297) und neuerlich von Carnot (Mém. sur la relation . . 12) gefundene Relation durch Joachimsthal l. c. (27) gebracht worden. Eine geometrische Ableitung derselben hat v. Staudt Crelle J. 57 p. 88 gegeben.

**) Carnot l. c.

$$16\,A_1 A_2 A_3\,.\,B_1 B_2 B_3 \cos\varphi = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{vmatrix}$$

worin sich die ersten Numern auf das erste Dreieck, die zweiten Numern auf das zweite Dreieck beziehen*).

Beweis. Nach (3) ist in der angegebenen Bezeichnung

$$16\,A_1 A_2 A_3\,.\,B_1 B_2 B_3 \cos\varphi = \begin{vmatrix} 2\,c_{22} & 2\,c_{32} \\ 2\,c_{23} & 2\,c_{33} \end{vmatrix}.$$

Nun ist (12)

$$2\,c_{ik} = d_{1k} - d_{ik} - (d_{11} - d_{i1})\,.$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} d_{12}-d_{22}-(d_{11}-d_{21}) & d_{12}-d_{32}-(d_{11}-d_{31}) \\ d_{13}-d_{23}-(d_{11}-d_{21}) & d_{13}-d_{33}-(d_{11}-d_{31}) \end{vmatrix}$$

lässt sich nach §. 2, 6 und §. 3, 6 transformiren in

$$\begin{vmatrix} 1 & d_{11}-d_{21}-(d_{11}-d_{21}) & d_{11}-d_{31}-(d_{11}-d_{31}) \\ 1 & d_{12}-d_{22}-(d_{11}-d_{21}) & d_{12}-d_{32}-(d_{11}-d_{31}) \\ 1 & d_{13}-d_{23}-(d_{11}-d_{21}) & d_{13}-d_{33}-(d_{11}-d_{31}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & d_{11}-d_{21} & d_{11}-d_{31} \\ 1 & d_{12}-d_{22} & d_{12}-d_{32} \\ 1 & d_{13}-d_{23} & d_{13}-d_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-1 & 1-1 \\ d_{11} & 1 & d_{11}-d_{21} & d_{11}-d_{31} \\ d_{12} & 1 & d_{12}-d_{22} & d_{12}-d_{32} \\ d_{13} & 1 & d_{13}-d_{23} & d_{13}-d_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{vmatrix}.$$

Zusätze. Wenn die Punkte B_1, B_2, B_3 der Reihe nach mit den Punkten A_1, A_2, A_3 zusammenfallen, so wird $\cos\varphi = 1$, $d_{ik} = d_{ki}$, $d_{ii} = 0$, folglich

$$16\,A_1 A_2 A_3^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix}$$

übereinstimmend mit dem alten Ausdruck der Dreiecksfläche durch die Seiten (vergl. §. 3, 17).

---

*) Diese Form hat der Satz, welchen v. Staudt l. c. zuerst aufgestellt hat, durch Sylvester (Philos. Mag. 1852, II p. 335) erhalten. Aehnliche Determinanten hatte Cayley gebildet. Vergl. unten §. 17, 9 und 12.

Die Bedingung, dass A_1, A_2, A_3 auf einer Geraden liegen, lautet

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Bei jeder Lage eines Punktes auf der Geraden durch die beiden andern Punkte verschwindet je ein Factor der Determinante.

Da die Fläche des ebenen Vierecks

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = A_1 A_2 A_3 + A_1 A_3 A_4$$

ist, so hat man für zwei ebene Vierecke, deren Ebenen den Winkel φ einschliessen,

$$16\, A_1 A_2 A_3 A_4 \,.\, B_1 B_2 B_3 B_4 \cos\varphi$$

$$= 16\, A_1 A_2 A_3 \,.\, B_1 B_2 B_3 \cos\varphi + 16\, A_1 A_2 A_3 \,.\, B_1 B_3 B_4 \cos\varphi$$

$$+ 16\, A_1 A_3 A_4 \,.\, B_1 B_2 B_3 \cos\varphi + 16\, A_1 A_3 A_4 \,.\, B_1 B_3 B_4 \cos\varphi$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{31} & d_{41} \\ 1 & d_{12} & d_{32} & d_{42} \\ 1 & d_{13} & d_{33} & d_{43} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{31} & d_{41} \\ 1 & d_{13} & d_{33} & d_{43} \\ 1 & d_{14} & d_{34} & d_{44} \end{vmatrix} .$$

Sind demnach A und B die Flächen ebener Polygone von m und n Seiten, deren Ebenen den Winkel φ bilden, so ist $AB\cos\varphi$ die negative Summe von $(m-2)(n-2)$ Determinanten vierten Grades von der angegebenen Art, also eine ganze Function von den Quadraten der Strecken, welche die Eckpunkte des einen Polygons mit denen des andern verbinden *).

14. Wenn d_{ik} das Quadrat der Strecke $A_i B_k$ bedeutet, so ist für zwei Tetraeder

*) v. Staudt l. c.

$$288\, A_1 A_2 A_3 A_4 \,.\, B_1 B_2 B_3 B_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} & d_{41} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} & d_{42} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{43} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44} \end{vmatrix}$$

worin die ersten Numern auf das erste Tetraeder, die zweiten Numern auf das zweite Tetraeder sich beziehen.

Beweis. Das gesuchte Product ist nach (7) die Determinante

$$\begin{vmatrix} d_{12}-d_{22}-(d_{11}-d_{21}) & d_{12}-d_{32}-(d_{11}-d_{31}) & d_{12}-d_{42}-(d_{11}-d_{41}) \\ d_{13}-d_{23}-(d_{11}-d_{21}) & d_{13}-d_{33}-(d_{11}-d_{31}) & d_{13}-d_{43}-(d_{11}-d_{41}) \\ d_{14}-d_{24}-(d_{11}-d_{21}) & d_{14}-d_{34}-(d_{11}-d_{31}) & d_{14}-d_{44}-(d_{11}-d_{41}) \end{vmatrix},$$

welche sich auf die (13) angegebene Weise in

$$\begin{vmatrix} 1 & d_{11}-d_{21} & d_{11}-d_{31} & d_{11}-d_{41} \\ 1 & d_{12}-d_{22} & d_{12}-d_{32} & d_{12}-d_{42} \\ 1 & d_{13}-d_{23} & d_{13}-d_{33} & d_{13}-d_{43} \\ 1 & d_{14}-d_{24} & d_{14}-d_{34} & d_{14}-d_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} & d_{41} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} & d_{42} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{43} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44} \end{vmatrix}$$

transformiren lässt.

Zusätze. Wenn die Punkte B_1, B_2, B_3, B_4 der Reihe nach mit A_1, A_2, A_3, A_4 zusammenfallen, so wird $d_{ik} = d_{ki}$, $d_{ii} = 0$, folglich

$$288\, A_1 A_2 A_3 A_4^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix}.$$

Wenn man diese Determinante nach §. 3, 17 entwickelt, so erhält man die bekannte von Jungius (vergl. 11) und später von Euler (Nov. Comm. Petrop. 4 p. 158) aufgestellte Formel zur Berechnung des Tetraedervolums aus den Kanten.

Die Bedingung, unter welcher die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 auf einer Ebene liegen, lautet

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

übereinstimmend mit der Gleichung zwischen den Strecken, welche 4 Punkte einer Ebene verbinden (JUNGIUS und EULER Acta Petrop. 6, I p. 3).

Eine mehrseitige Pyramide ist die Summe von dreiseitigen Pyramiden, welche die Spitze der mehrseitigen Pyramide zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und deren Basen die Dreiecke sind, aus denen die Basis der mehrseitigen Pyramide besteht. Ein Polyeder ist die Summe der Pyramiden, welche einen Eckpunkt des Polyeders zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und deren Basen die Flächen des Polyeders sind. Demnach lässt sich das Product der Volume von zwei Polyedern als Summe von Producten aus jedesmal zwei Tetraedern betrachten und als Summe von Determinanten fünften Grades der angegebenen Art darstellen. Das Product aus zwei Polyedern ist also eine ganze Function von den Quadraten der Strecken, welche die Eckpunkte des einen Polyeders mit denen des andern verbinden, wie v. STAUDT bemerkt hat.

15. Wenn man den Coefficienten des Elements c_{ik} (7) in der Determinante $\Sigma \pm c_{11} c_{22} c_{33}$ durch γ_{ik} bezeichnet, so hat man nach §. 6, 1

$$\Sigma \pm \gamma_{11} \gamma_{22} \gamma_{33} = (\Sigma \pm c_{11} c_{22} c_{33})^2$$

mithin (7)

$$36\,(A A_1 A_2 A_3 \,.\, B B_1 B_2 B_3)^2 = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix}.$$

Die Elemente $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{33}$ sind Flächenproducte von der in (3) betrachteten Art, nämlich

$$\gamma_{11} = \Sigma \pm c_{22} c_{33} = 4\, A A_2 A_3 \,.\, B B_2 B_3 \cos_{11}$$

$$\gamma_{12} = \Sigma \pm c_{23} c_{31} = 4\, A A_2 A_3 \,.\, B B_3 B_1 \cos_{12}$$

u. s. w., wo $\cos_{11}, \cos_{12}, \ldots$ die Cosinus der von den Ebenen der Flächen $A A_2 A_3$ und $B B_2 B_3$, $A A_2 A_3$ und $B B_3 B_1$, .. gebildeten Flächenwinkel bedeuten.

Wenn das zweite Tetraeder mit dem ersten zusammenfällt, und wenn die Flächen $A A_2 A_3$, $A A_3 A_1$, $A A_1 A_2$ die Werthe f_1, f_2, f_3 haben, so findet man

$$6\,AA_1A_2A_3)^4 = 4^3 f_1^2 f_2^2 f_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos_{12} & \cos_{13} \\ \cos_{21} & 1 & \cos_{23} \\ \cos_{31} & \cos_{32} & 1 \end{vmatrix}$$

oder nach §. 15, 3

$$6\,AA_1A_2A_3)^2 = 8 f_1 f_2 f_3 \sin_{123}\ ^*)$$

wo $\sin_{123}$ den Sinus der Ecke bedeutet, deren Kanten die (positiven) Normalen der Ebenen AA_2A_3, AA_3A_1, AA_1A_2 sind, und welche der von den Geraden AA_1, AA_2, AA_3 gebildeten Ecke des Tetraeders so zugeordnet ist, dass die Kugelschnitte der beiden Ecken Polarfiguren sind.

16. Bezeichnet man beim Zusammenfallen der Tetraeder $AA_1A_2A_3$ und $BB_1B_2B_3$ die Werthe $c_{11}, \ldots; \gamma_{11}, \ldots$ durch $a_{11}, \ldots$, $\alpha_{11}, \ldots$, und das 6fache Volum des Tetraeders durch v, so ist $a_{21} = a_{12}$; $\alpha_{21} = \alpha_{12}$, u. s. w. und (15)

$$v^2 = \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}, \qquad v^4 = \Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33},$$

$$\alpha_{11} = 4\,AA_2A_3^2, \qquad \alpha_{12} = 4\,AA_2A_3\,.\,AA_3A_1 \cos_{12}, \quad \text{u. s. w.}$$

Dabei hat man für die vierte Tetraederfläche**)

$$4\,A_3A_2A_1^2 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{23} + 2\alpha_{31} + 2\alpha_{12} = 4f^2$$

so wie für die Diagonale AA' des Parallelepipeds, von welchem A ein Eckpunkt und $A_1A_2A_3$ ein Diagonaldreieck ist,

$$AA'^2 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2a_{23} + 2a_{31} + 2a_{12}\,.$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke hat Lagrange (sur les pyr. 17) die Tetraeder von grösstem oder kleinsten Volum bestimmt, deren Flächen gegebene Inhalte haben. Dann sind α_{11}, α_{22}, α_{33} und

$$2\alpha_{23} + 2\alpha_{31} + 2\alpha_{12} = 4f^2 - \alpha_{11} - \alpha_{22} - \alpha_{33} = -2s$$

von gegebener Grösse, und $v^4 = \Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}$ kann einen grössten oder kleinsten Werth annehmen, wenn der Coefficient μ den Bedingungen

---

*) Diese Gleichung ist von Lagrange's Gleichung (sur les pyr. 17) nicht wesentlich verschieden. Vergl. Bretschneider Geometrie 677 und des Verf. Elem. d. Math. 6tes Buch §. 6, 16.

**) Lagrange sur les pyr. 12. Vergl. des Verf. Elem. d. Math. 6tes Buch §. 6, 5.

$$\frac{\partial r^4}{\partial \alpha_{23}} + \mu \frac{\partial s}{\partial \alpha_{23}} = 0\,, \qquad \frac{\partial r^4}{\partial \alpha_{31}} + \mu \frac{\partial s}{\partial \alpha_{31}} = 0\,, \qquad \frac{\partial r^4}{\partial \alpha_{12}} + \mu \frac{\partial s}{\partial \alpha_{12}} = 0$$

genügt. Nun ist $\frac{\partial s}{\partial \alpha_{23}} = -1$, und $\frac{1}{2}\frac{\partial r^4}{\partial \alpha_{23}}$ hat als Coefficient von α_{23} in $\Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}$ den Werth $r^2 a_{23}$ (§. 6, 2), u. s. w. Also gelten für ein Tetraeder von der geforderten Eigenschaft die Bedingungen

$$a_{23} = a_{31} = a_{12}\,.$$

Bezeichnet man die Geraden AA_1, AA_2, AA_3, A_2A_3 durch r_1, r_2, r_3, ϱ_1, so hat man allgemein (§. 16, 5)

$$AA_1 \,.\, A_2A_3 \cos r_1\varrho_1 + AA_1 \,.\, A_3A \cos r_1 r_3 + AA_1 \,.\, AA_2 \cos r_1 r_2 = 0\,.$$

In dem vorliegenden Falle sind die beiden letzten Glieder dieser Gleichung entgegengesetzt gleich, daher bleibt

$$AA \,.\, A_2A_3 \cos r_1\varrho_1 = 0\,,$$

d. h. das gesuchte Tetraeder gehört zu den besondern Tetraedern, deren gegenüberliegende Kanten normal zu einander sind, und deren Höhen sich in einem Punkt schneiden*).

Um die Elemente des gesuchten Tetraeders zu berechnen, hat man eine Gleichung 4ten Grades aufzulösen. Bezeichnet man nämlich die gleichen Kantenproducte a_{23}, a_{31}, a_{12} durch $\sqrt{\vartheta}$, so hat man

$$\alpha_{11} = a_{22}a_{33} - \vartheta \qquad \alpha_{23} = \vartheta - a_{11}\sqrt{\vartheta}$$
$$\alpha_{22} = a_{33}a_{11} - \vartheta \qquad \alpha_{31} = \vartheta - a_{22}\sqrt{\vartheta}$$
$$\alpha_{33} = a_{11}a_{22} - \vartheta \qquad \alpha_{12} = \vartheta - a_{33}\sqrt{\vartheta}$$

folglich

$$(a_{11} + a_{22} + a_{33})\sqrt{\vartheta} = 3\vartheta + s\,, \quad a_{11}{}^2 = \frac{(\vartheta + \alpha_{22})(\vartheta + \alpha_{33})}{\vartheta + \alpha_{11}}\,, \text{ u. s. w.}$$

$$\left\{\frac{(\vartheta + \alpha_{22})(\vartheta + \alpha_{33})}{\vartheta + \alpha_{11}} + \frac{(\vartheta + \alpha_{33})(\vartheta + \alpha_{11})}{\vartheta + \alpha_{22}} + \frac{(\vartheta + \alpha_{11})(\vartheta + \alpha_{22})}{\vartheta + \alpha_{33}}\right\}\vartheta$$
$$= 3\vartheta^2 + 2\vartheta(s - 4f^2) + s^2\,,$$

$$\vartheta(\vartheta + \alpha_{22})^2(\vartheta + \alpha_{33})^2 + \vartheta(\vartheta + \alpha_{33})^2(\vartheta + \alpha_{11})^2 + \vartheta(\vartheta + \alpha_{11})^2(\vartheta + \alpha_{22})^2$$
$$= [3\vartheta^2 + 2\vartheta(s - 4f^2) + s^2](\vartheta + \alpha_{11})(\vartheta + \alpha_{22})(\vartheta + \alpha_{33})\,.$$

---

*) Diese Bemerkung ist von Painvin Compt. rend. t. 54 p. 379 und Nouv. Ann. 1862 p. 267 gemacht worden. Ueber die von Ferriot und Feuerbach betrachteten Tetraeder der angegebenen Art vergl. des Verf. Elem. d. Math. 5tes Buch §. 6, 10.

Diese Gleichung für ϑ ist 4ten Grades und hat eine positive reale Wurzel, weil der Coefficient von ϑ^4 auf der linken Seite und das bekannte Glied auf der rechten Seite beide positiv sind. Dass die Gleichung nicht mehr als eine positive reale Wurzel besitzt, und dass zu jener Wurzel ein reales Tetraeder gehört, dessen Volum ein Maximum ist, findet man in der angeführten Abhandlung Painvin's bewiesen.

17. Wenn die orthogonalen Coordinaten der Punkte M, N, A_i, B_k durch

$$a, b, c; \quad \alpha, \beta, \gamma; \quad x_i, y_i, z_i; \quad \xi_k, \eta_k, \zeta_k$$

und die Geraden NA_i, MB_k durch r, ϱ bezeichnet werden, so hat man

$$NA_i \cos r\varrho = (x_i - \alpha) \cos x\varrho + (y_i - \beta) \cos y\varrho + (z_i - \gamma) \cos z\varrho ,$$

$$NA_i \, . \, MB_k \cos r\varrho = (x_i - \alpha)(\xi_k - a) + (y_i - \beta)(\eta_k - b) + (z_i - \gamma)(\zeta_k - c) .$$

Zugleich ist (12)

$$2 NA_i \, . \, MB_k \cos r\varrho = MA_i^2 + NB_k^2 - MN^2 - A_iB_k^2 .$$

Setzt man nun voraus, dass M und N die Centren der Kugeln $A_1 A_2 A_3 A_4$ und $B_1 B_2 B_3 B_4$ sind, so ist

$$MA_i^2 + NB_k^2 - MN^2 = p$$

von unveränderlicher Grösse. Wenn insbesondere die Kugeln sich schneiden und O ein gemeinschaftlicher Punkt derselben ist, so hat man

$$p = MO^2 + NO^2 - MN^2 = 2 MO \, . \, NO \cos\varphi ,$$

wo φ den Winkel der Geraden MO und NO d. i. den Winkel der beiden Kugeln bedeutet. Demnach ergiebt sich, indem man wie oben (13) $A_iB_k^2$ durch d_{ik} bezeichnet,

$$-\tfrac{1}{2} d_{ik} = -\tfrac{1}{2} p + (x_i - \alpha)(\xi_k - a) + (y_i - \beta)(\eta_k - b) + (z_i - \gamma)(\zeta_k - c) .$$

Hieraus folgt nach der Multiplicationsregel (§. 5, 1)

$$\tfrac{1}{16} \Sigma \pm d_{11} \ldots d_{44} = \begin{vmatrix} -\tfrac{1}{2}p & x_1 - \alpha & y_1 - \beta & z_1 - \gamma \\ . & . & . & . \\ -\tfrac{1}{2}p & x_4 - \alpha & y_4 - \beta & z_4 - \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 - a & \eta_1 - b & \zeta_1 - c \\ . & . & . & . \\ 1 & \xi_4 - a & \eta_4 - b & \zeta_4 - c \end{vmatrix} .$$

Indem man den Factor $\frac{1}{2}p$ absondert und zur 2ten, 3ten, 4ten Colonne in beiden Systemen die multiplicirte 1te Colonne addirt, findet man nach §. 15, 6

$$288\,p \,.\, A_1 A_2 A_3 A_4 \,.\, B_1 B_2 B_3 B_4 = -\Sigma \pm d_{11} \,.\,.\, d_{44}\,^{*)},$$

eine Gleichung, die beim Zusammenfallen der beiden Tetraeder auf die oben (11) entwickelte sich reducirt.

Man erkennt hieraus, dass die Determinante $\Sigma \pm d_{11} \,.\,.\, d_{44}$, deren Elemente die Quadrate der Strecken sind, welche 4 Punkte mit 4 andern Punkten verbinden, dem Product der beiden Tetraedervolume proportional ist, und übrigens nur von der Grösse und dem Abstand der umgeschriebenen Kugeln abhängt. Sie verschwindet, wenn die beiden Kugeln sich rechtwinkelig schneiden, und insbesondere auch dann, wenn die 4 Punkte des einen Systems auf einem Kreise liegen.

Mit Hülfe von (14) ergiebt sich noch

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . \\ 1 & d_{11} & d_{21} & . \\ 1 & d_{12} & d_{22} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{1}{p} & 1 & 1 & . \\ 0 & d_{11} & d_{21} & . \\ 0 & d_{12} & d_{22} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{p} & 1 & . & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & . & d_{41} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & d_{14} & . & . & d_{44} \end{vmatrix} = 0$$

eine Gleichung, welche ausser den Quadraten der Strecken nur die Grösse p enthält.

18. Aus den gefundenen Gleichungen (17) hat Siebeck a. a. O. analoge goniometrische Gleichungen abgeleitet. Man vereinige die Punkte A_4 und B_4 im Centrum O einer Kugel, deren Radius die Längeneinheit ist, und auf welcher die sphärischen Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ liegen. Dann ist $d_{44} = 0$,

$$d_{14} = d_{24} = d_{34} = d_{41} = d_{42} = d_{43} = 1,$$

$$d_{ik} = 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} A_i B_k = 2 - 2 \cos A_i B_k,$$

$$36\, A_1 A_2 A_3 A_4 \,.\, B_1 B_2 B_3 B_4 = \sin A_1 A_2 A_3 \sin B_1 B_2 B_3,$$

*) Siebeck Crelle J. 62 p. 151.

$$-16\,p \sin A_1 A_2 A_3 \,.\, \sin B_1 B_2 B_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . \\ 2 & 2-2\cos A_1 B_1 & 2-2\cos A_2 B_1 & . \\ 2 & 2-2\cos A_1 B_2 & 2-2\cos A_2 B_2 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

$$-2\,p \sin A_1 A_2 A_3 \sin B_1 B_2 B_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos A_1 B_1 & \cos A_2 B_1 & \cos A_3 B_1 \\ 1 & \cos A_1 B_2 & \cos A_2 B_2 & \cos A_3 B_2 \\ 1 & \cos A_1 B_3 & \cos A_2 B_3 & \cos A_3 B_3 \end{vmatrix}.$$

Nach (6) hat man aber auch

$$\sin A_1 A_2 A_3 \sin B_1 B_2 B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cos A_1 B_1 & \cos A_2 B_1 & \cos A_3 B_1 \\ 0 & \cos A_1 B_2 & \cos A_2 B_2 & \cos A_3 B_2 \\ 0 & \cos A_1 B_3 & \cos A_2 B_3 & \cos A_3 B_3 \end{vmatrix},$$

folglich

$$1-2\,p \sin A_1 A_2 A_3 \sin B_1 B_2 B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos A_1 B_1 & \cos A_2 B_1 & \cos A_3 B_1 \\ 1 & \cos A_1 B_2 & \cos A_2 B_2 & \cos A_3 B_2 \\ 1 & \cos A_1 B_3 & \cos A_2 B_3 & \cos A_3 B_3 \end{vmatrix},$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos A_1 B_1 & \cos A_2 B_1 & \cos A_3 B_1 \\ 1 & \cos A_1 B_2 & \cos A_2 B_2 & \cos A_3 B_2 \\ 1 & \cos A_1 B_3 & \cos A_2 B_3 & \cos A_3 B_3 \end{vmatrix}.$$

Um die Grösse p sphärisch auszudrücken, braucht man die sphärischen Centren P und Q der Kreise $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ auf der mit der Längeneinheit um den Punkt O beschriebenen Kugel. Die Geraden OP und OQ sind Diameter der Kugeln $A_1 A_2 A_3 O$ und $B_1 B_2 B_3 O$, also ist $\cos PQ$ der Cosinus des von den Geraden OM und ON gebildeten Winkels, mithin

$$p = 2\,OM \,.\, ON \cos PQ\,, \qquad 2p = OP \,.\, OQ \cos PQ\,.$$

Nun ist $OP \cos PA_1 = OA_1 = 1\,, \quad OQ \cos QB_1 = OB_1 = 1\,,$ folglich

$$2p = \frac{\cos PQ}{\cos PA_1 \cos QB_1}\,.$$

Wenn die Kreise $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ in R sich schneiden, so hat man

$$\cos PQ = \cos PR \cos RQ + \sin PR \sin RQ \cos QRP ,$$

$$2p = 1 + \operatorname{tang} PR \operatorname{tang} RQ \cos QRP .$$

Bei rechtwinkelig sich schneidenden Kreisen ist $2p = 1$.

§. 17. Polygonometrische und polyedrometrische Relationen.

1. Wenn die Seiten AB, BC, .., MN, NA eines beliebigen Polygons nach willkürlicher Festsetzung der positiven Richtungen der Geraden, auf denen sie liegen, die Werthe a_1, a_2, .., a_n haben, und $\cos_{pi}$ den Cosinus des Winkels bedeutet, welchen die Gerade der $i$ten Seite mit einer beliebigen Geraden bildet, so ist*)

$$a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \ldots + a_n \cos_{pn} = 0 .$$

Sind nämlich A_1, B_1, .. die orthogonalen Projectionen von A, B, .. auf eine beliebige Gerade, so hat man

$$A_1 B_1 + B_1 C_1 + \ldots + M_1 N_1 + N_1 A_1 = 0$$

unter der Voraussetzung, dass $A_1 B_1 = - B_1 A_1$, u. s. w. Nun ist allgemein $A_1 B_1 = AB \cos_{p1}$, wie auch die Richtung der positiven Strecken auf den Geraden, deren Strecken AB und $A_1 B_1$ sind, angenommen werde, weil bei Vertauschung einer Richtung mit der entgegengesetzten zwei der Grössen $A_1 B_1$, AB, $\cos_{p1}$ das Zeichen wechseln. Durch Substitution der Werthe von $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, .. findet man die angegebene Fundamentalgleichung der Polygonometrie.

Wenn umgekehrt a_1, a_2, .., a_n Strecken von gegebener Richtung und Grösse sind, und $\cos_{pi}$ den Cosinus des Winkels bedeutet, welchen die Gerade, auf welcher die $i$te Strecke liegt, mit einer beliebigen Geraden bildet, und die Summe

$$S = a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \ldots + a_n \cos_{pn}$$

verschwindet, wie auch die willkürliche Gerade angenommen werde, so erhält man ein geschlossenes Polygon, wenn man nach willkürlicher Anordnung der Strecken, ohne deren Richtungen zu verändern, mit dem Ende der ersten den Anfang

*) Lexell Nov. Comm. Petrop. 19 p. 187. L'Huilier polygonométrie p. 20. Carnot géom. de pos. 254.

der zweiten, mit dem Ende der zweiten den Anfang der dritten u. s. f. vereint. Gesetzt, das Ende der letzten Strecke fiele mit dem Anfang der ersten nicht zusammen, so würde die Summe S im Allgemeinen nicht verschwinden, was der Voraussetzung widerstreitet.

2. Der Inhalt eines planen Dreiecks ist unzweideutig bestimmt, wenn nicht nur der Sinn, in welchem sein Perimeter zu durchlaufen ist, sondern auch die positive Richtung der Normalen seiner Ebene nebst dem positiven Sinn der Ebene gegeben ist. Der Beurtheiler stelle sich so auf die Ebene, dass ihm die positive Richtung der Normalen aufwärts gehend erscheint; je nachdem nun die durch die Ordnung der Eckpunkte gegebene Drehung mit der Drehung, durch welche positive Winkel und Flächen beschrieben werden, einerlei Sinnes ist oder nicht, wird der Inhalt als positiv oder negativ bezeichnet. In gleicher Weise ist zur unzweideutigen Bestimmung des Inhalts jedes planen Polygons der Sinn seines Perimeters erforderlich.

Bei einer Fläche eines gegebenen Polyeders kann der Sinn ihres Perimeters willkürlich bestimmt werden. Bei jeder mit dieser Fläche durch eine gemeinschaftliche Kante MN verbundenen Fläche des Polyeders wird der Sinn des Perimeters so angenommen, dass die vereinigten Theile der beiden Perimeter einander entgegengesetzt sind, also der eine durch MN, der andre durch NM ausgedrückt wird *). Wenn z. B. eine Fläche des Tetraeders $ABCD$ durch ABC ausgedrückt wird, so sind die übrigen Flächen durch CBD, BAD, ACD auszudrücken. Ist $ABCD$ eine Fläche eines Hexaeders, so sind $DCC'D'$, $CBB'C'$, $BAA'B'$, $ADD'A'$, $D'C'B'A'$ die übrigen Flächen. U. s. f.

Wenn nun die in der angegebenen Weise ausgedrückten Flächen eines Polyeders nach willkürlicher Festsetzung der positiven Richtung der Normalen und des positiven Sinnes einer jeden Ebene die Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ haben, und wenn durch $\cos_{pi}$ der Cosinus des Winkels bezeichnet wird, welchen die

*) Dieses Princip ist von Möbius Statik §. 55 angedeutet worden.

Ebene der $i$ten Fläche mit einer beliebig hinzugefügten Ebene bildet, so ist *)

$$\alpha_1 \cos_{p1} + \alpha_2 \cos_{p2} + \ldots + \alpha_n \cos_{pn} = 0 .$$

Beweis. Man bezeichne die Normalprojectionen der Eckpunkte $A, B, C, \ldots$ auf die beliebig angenommene Ebene durch $A_1, B_1, C_1, \ldots$ Die Summe Σ der Projectionen der Polyederflächen besteht aus der Summe aller Dreiecke, welche einen beliebigen Punkt O der Projectionsebene zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und deren Basen die Seiten der durch Projection der Polyederflächen entstandenen Polygone sind. Die Summe dieser Dreiecke enthält aber zu jedem Dreieck OM_1N_1 auch das entgegengesetzte ON_1M_1, folglich verschwindet sie und mit ihr die Summe Σ. Nun ist die Projection der $i$ten Fläche

$$F_1 G_1 H_1 \ldots = F G H \ldots \cos_{pi} ,$$

also verschwindet die Summe $\alpha_1 \cos_{p1} + \alpha_2 \cos_{p2} + \ldots$

Zusatz. Construirt man auf den Normalen der Flächen des Polyeders je eine Strecke $a_1, a_2, \ldots, a_n$ proportional den Werthen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ der Flächen, zu denen die Normalen gehören, so ist zufolge der bewiesenen Gleichung auch

$$a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \ldots + a_n \cos_{pn} = 0 ,$$

wo nun unter $\cos_{pi}$ der Cosinus des Winkels verstanden werden kann, den die Gerade, auf der die Strecke a_i liegt, mit der Normale einer beliebigen Ebene d. h. mit einer beliebigen Geraden bildet. Daher erhält man (1) ein geschlossenes Polygon, wenn man, ohne die Richtung der Strecken $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zu verändern, mit dem Ende der ersten Strecke den Anfang der zweiten, dann mit dem Ende der zweiten den Anfang der dritten u. s. f. vereint. Es giebt also für jedes Polyeder ein zugehöriges Polygon, dessen Seiten und Winkel den Flächen und Flächenwinkeln des Polyeders gleich sind, so dass jeder polygonometrischen Gleichung zwischen den Seiten und Winkeln des Polygons eine polyedrometrische Gleichung zwi-

---

*) L'Huilier théorèmes de polyedr. 1799 (Mém. présentés à l'Inst. 1. 1805 p. 264). Carnot l. c. Die Voraussetzungen, unter welchen die Gleichung gültig ist, werden in den angeführten Schriften nicht genau angegeben.

schen den Flächen und Flächenwinkeln des Polyeders entspricht.

3. Indem man die beliebige Gerade (Ebene) der Reihe nach mit den Geraden (Ebenen) der verschiedenen Polygonseiten (Polyederflächen) vereinigt, erhält man das System von linearen Gleichungen (1)

$$\begin{array}{l} a_1 \cos_{11} + a_2 \cos_{12} + \ldots + a_n \cos_{1n} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_1 \cos_{n1} + a_2 \cos_{n2} + \ldots + a_n \cos_{nn} = 0 \end{array}$$

worin $\cos_{ii} = 1$, $\cos_{ki} = \cos_{ik}$ ist. Zufolge dieses Systems hat man (§. 8)

$$\begin{vmatrix} \cos_{11} & \ldots & \cos_{1n} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cos_{n1} & \ldots & \cos_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

eine Gleichung zwischen den Cosinus der Winkel von n Geraden (Ebenen), die mit den Seiten (Flächen) eines Polygons (Polyeders) parallel sind.

Da 3 Gerade x, y, r, welche mit einer Ebene parallel sind, auch mit den Seiten eines Dreiecks parallel sind, so hat man, wie bekannt,

$$\text{(I)} \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos xr & \cos yr \\ \cos xr & 1 & \cos xy \\ \cos yr & \cos xy & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn 4 beliebige Gerade (Ebenen) x, y, z, r gegeben sind, so lässt sich ein Viereck (Tetraeder) construiren, dessen Seiten (Flächen) mit den gegebenen Geraden (Ebenen) parallel sind. Folglich ist

$$\text{(II)} \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos xr & \cos yr & \cos zr \\ \cos xr & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung, welche man nach §. 3, 17 entwickeln kann, enthält den Zusammenhang zwischen den Cosinus der von 4 Geraden (Ebenen) gebildeten Winkeln, zwischen den Seiten

und Diagonalen eines sphärischen Vierecks, zwischen den Flächenwinkeln eines Tetraeders*).

Wenn insbesondere x, y, z, r die Richtungen der Kanten AB, AC, AD und des Radius AE der dem Tetraeder $ABCD$ umgeschriebenen Kugel bedeuten, wenn $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$, $AE = e$, so hat man

$$1 : \cos xr : \cos yr : \cos zr = 2e : b : c : d\,,$$

folglich (§. 3, 4)

$$\text{III} \qquad \begin{vmatrix} 4e^2 & b & c & d \\ b & 1 & \cos xy & \cos xz \\ c & \cos xy & 1 & \cos yz \\ d & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0$$

zur Berechnung des Radius der einem Tetraeder umgeschriebenen Kugel aus den Elementen einer Ecke**).

Wenn E irgend einen fünften Punkt des Raumes bedeutet, so hat man bei den vorigen Bezeichnungen

$$\text{IV} \qquad \begin{vmatrix} e^2 & be\cos xr & ce\cos yr & de\cos zr \\ be\cos xr & b^2 & bc\cos xy & bd\cos xz \\ ce\cos yr & bc\cos xy & c^2 & cd\cos yz \\ de\cos zr & bd\cos xz & cd\cos yz & d^2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Drückt man das Streckenproduct $be\cos xr$ durch die Quadrate der Seiten des Dreiecks ABE aus u. s. w., so erhält man die Gleichung zwischen den Quadraten der Strecken, welche 5 Punkte des Raumes verbinden. Diese Gleichung ist für das Quadrat einer Strecke vom zweiten Grade, in Uebereinstimmung mit der Construction, durch welche die Strecke aus den übrigen Strecken gefunden wird***).

---

*) Carnot géom. de pos. 350.

**) Legendre élém. de géom. Note V. Diese Gleichung ist nicht wesentlich verschieden von Lagrange's Gleichung (sur les pyr. 21).

***) Carnot géom. de pos. 359. Mém. sur la relation qui existe etc. 58. Diese Gleichung ist von Lagrange's Gleichung (sur les pyr. 19) nur äusserlich verschieden. Vergl. unten 12.

4. Aus dem System der linearen Gleichungen

$$\begin{array}{l} a_1 \cos_{p1} + a_2 \cos_{p2} + \,.\,.\, + a_n \cos_{pn} = 0 \\ a_1 \cos_{21} + a_2 \cos_{22} + \,.\,.\, + a_n \cos_{2n} = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_1 \cos_{n1} + a_2 \cos_{n2} + \,.\,.\, + a_n \cos_{nn} = 0 \end{array}$$

folgt die allgemeinere Gleichung

$$\begin{vmatrix} \cos_{p1} & \cos_{p2} & .\,. & \cos_{pn} \\ \cos_{21} & \cos_{22} & .\,. & \cos_{2n} \\ . & . & . & . \\ \cos_{n1} & \cos_{n2} & .\,. & \cos_{nn} \end{vmatrix} = 0\,,$$

welche den Zusammenhang zwischen den von $n+1$ Geraden (Ebenen) gebildeten Winkeln ausdrückt, wenn n Gerade (Ebenen) mit den Seiten (Flächen) eines Polygons (Polyeders) von n Seiten (Flächen) parallel sind.

In der analytischen Theorie der Geraden werden hauptsächlich die besondern Fälle

$$\begin{vmatrix} \cos rs & \cos xs & \cos ys \\ \cos xr & 1 & \cos xy \\ \cos yr & \cos xy & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$\begin{vmatrix} \cos rs & \cos xs & \cos ys & \cos zs \\ \cos xr & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0$$

zur Bestimmung des Winkels von zwei Geraden aus den Winkeln, welche dieselben mit den coordinirten Axen bilden, angewendet*).

5. Aus dem in (3) benutzten System von linearen Gleichungen lassen sich die Verhältnisse der Seiten eines Polygons (oder der Flächen eines Polyeders) ableiten. Nach §. 8 mit Rücksicht auf §. 6, 5 findet man

$$\begin{array}{l} a_1 : a_2 \,.\, a_3 : \,.\,.\, = \beta_{i1} : \beta_{i2} : \beta_{i3} : \,.\,. \\ a_1^2 : a_2^2 : a_3^2 : \,.\,.\, = \beta_{11} : \beta_{22} : \beta_{33} : \,.\,. \end{array}$$

*) Magnus anal. Geom. des Raumes §. 9 (7). Vergl. einen Aufsatz des Verf. in Crelle J. 46 p. 145.

wenn β_{ik} den Coefficienten von $\cos_{ik}$ in der Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos_{11} & . & . & \cos_{1n} \\ . & . & & . \\ \cos_{n1} & & . & \cos_{nn} \end{vmatrix}$$

bedeutet. Bezeichnet man (wie §. 13, 3) die Determinante $\Sigma \pm \cos_{11} \ldots \cos_{nn}$ durch $\sin^2{}_{1,2,\ldots,n}$, so ist

$$\beta_{ii} = \sin^2{}_{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n} .$$

Für $n = 3$ reducirt sich β_{11} auf $\sin^2{}_{23}$, β_{22} auf $\sin^2{}_{13}$, β_{33} auf $\sin^2{}_{12}$ in Uebereinstimmung mit dem bekannten Satz von den Verhältnissen der Seiten eines Dreiecks.

Wenn das Polygon plan ist und $n > 3$, so verschwinden $\beta_{11}, \beta_{22}, \ldots \beta_{nn}$ (3), weil $n-1$ Gerade einer Ebene ein $(n-1)$ Eck bilden. Die Verhältnisse der Seiten eines planen Polygons sind daher im Allgemeinen unbestimmte Functionen der von den Seiten gebildeten Winkel.

Wenn das Polygon nicht plan ist und $n = 4$, so ist

$$\beta_{11} = \sin^2{}_{234}, \quad \beta_{22} = \sin^2{}_{134}, \quad \beta_{33} = \sin^2{}_{124}, \quad \beta_{44} = \sin^2{}_{123} .$$

Dem absoluten Werthe nach ist also

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = \sin_{234} : \sin_{134} : \sin_{124} : \sin_{123} .$$

Der gleichlautende tetraedrometrische Satz von den Verhältnissen der Flächen eines Tetraeders ist bekannt*). Wenn $n > 4$, so kann in besondern Fällen die Proportion der Polygonseiten (Polyederflächen) unbestimmt werden.

Vermöge der gefundenen Proportion hat man (1)

$$\beta_{i1} \cos_{p1} + \beta_{i2} \cos_{p2} + \ldots + \beta_{in} \cos_{pn} = 0 ,$$

eine Fundamentalgleichung der räumlichen Goniometrie, worin eine beliebige Numer für i und $\sqrt{\beta_{ii}}\sqrt{\beta_{kk}}$ für β_{ik} gesetzt werden kann. In dem einfachsten Falle ergiebt sich

$$\sin_{23} \cos_{p1} + \sin_{31} \cos_{p2} + \sin_{12} \cos_{p3} = 0 ,$$

die bekannte Gleichung der planen Goniometrie.

6. Die Lage des Punktes P in Bezug auf das Tetraeder $OABC$ ist durch die Abstände AP, BP, CP zweideutig be-

*) Bretschneider Geom. 677.

stimmt, denn der mit P symmetrisch zu der Ebene ABC liegende Punkt P' hat von A, B, C dieselben Abstände. Bezeichnet man einerseits AP^2, BP^2, CP^2 durch g_1, g_2, g_3, die Producte

$$OA \,.\, OP \cos AOP\,, \qquad OB \,.\, OP \cos BOP\,, \qquad OC \,.\, OP \cos COP$$

durch h_1, h_2, h_3, und OP^2, OA^2, . ., $OA \,.\, OB \cos AOB$, . . durch h, a_{11}, . . , a_{12}, . .; andrerseits die Coordinaten der Punkte A, B, C, P in Bezug auf drei durch O gelegte Axen durch x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x, y, z; so findet man zwischen beiderlei Bestimmungen von P folgende Relationen *).

Zunächst ergeben sich die trigonometrischen Gleichungen

$$2h_1 = a_{11} + h - g_1\,, \qquad 2h_2 = a_{22} + h - g_2\,, \qquad 2h_3 = a_{33} + h - g_3\,,$$

mit welchen man die quadratische Gleichung (3, IV) für h

$$\begin{vmatrix} h & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

zu verbinden hat, um die Coordinaten h_1, h_2, h_3 aus den Coordinaten g_1, g_2, g_3 zu berechnen.

Ferner ergiebt sich durch Projection (vergl. §. 15, 4)

$$\begin{aligned} h_1 &= xX_1 + yY_1 + zZ_1 \\ h_2 &= xX_2 + yY_2 + zZ_2 \\ h_3 &= xX_3 + yY_3 + zZ_3\,, \end{aligned}$$

wenn man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + y_1 \cos xy + z_1 \cos xz &= X_1 \\ x_1 \cos xy + y_1 \qquad\quad + z_1 \cos yz &= Y_1 \\ x_1 \cos xz + y_1 \cos yz + z_1 \qquad\quad &= Z_1 \end{aligned}$$

u. s. w. setzt. Umgekehrt hat man (§. 8, 1)

$$\begin{aligned} Rx &= h_1 (X_1) + h_2 (X_2) + h_3 (X_3) \\ Ry &= h_1 (Y_1) + h_2 (Y_2) + h_3 (Y_3) \\ Rz &= h_1 (Z_1) + h_2 (Z_2) + h_3 (Z_3)\,, \end{aligned}$$

---

*) Lagrange sur les pyr. 18.

indem man durch R die Determinante

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6\, OABC \sin xyz$$

und durch $(X_1) \ldots$ den Coefficienten von $X_1, \ldots$ in R bezeichnet, der sich nach §. 5, 6 weiter entwickeln lässt.

Wenn insbesondere P das Centrum der dem Tetraeder $OABC$ umgeschriebenen Kugel ist, so hat man $g_1 = g_2 = g_3 = h$, folglich $h_1 = \frac{1}{2} a_{11}$, $h_2 = \frac{1}{2} a_{22}$, $h_3 = \frac{1}{2} a_{33}$ u. s. w.

Anstatt der Coordinaten g_1, g_2, g_3 können die Verhältnisse dieser Grössen zu h gebraucht werden. Dann sind P und P' die gemeinschaftlichen Punkte der Kugeln, welche die Strecken AO, BO, CO normal und harmonisch nach den Verhältnissen $\sqrt{g_1 : h}$, $\sqrt{g_2 : h}$, $\sqrt{g_3 : h}$ schneiden*).

7. Die Lage des Punktes P in Bezug auf das Tetraeder $OABC$ ist durch die Abstände desselben von drei Flächen des Tetraeders eindeutig bestimmt, wenn die positiven Richtungen der Normalen und die positiven Sinne der Ebenen gegeben sind. Bezeichnet man einerseits die Werthe der Flächen OBC, OCA, OAB, CBA durch f_1, f_2, f_3, f; die Werthe der Abstände des Punktes P von den genannten Flächen durch p_1, p_2, p_3, p; andrerseits die Coordinaten der Punkte A, B, C, P in Bezug auf drei durch O gelegte Axen wie vorhin, so hat man zwischen diesen Bestimmungen von P folgende Relationen**).

In §. 15, 7 wurde gesetzt

$$OABC : OBCP : OCAP : OABP : CBAP = 1 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu\,,$$

$$6\, OABC = V \sin xyz\,,$$

daher ist

$$1 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu = V \sin xyz : 2 f_1 p_1 : 2 f_2 p_2 : 2 f_3 p_3 : 2 f p\,,$$

$$\mu_1 V = \frac{2 f_1 p_1}{\sin xyz} \quad \text{u. s. w.}$$

---

*) Vergl. des Verf. Elem. d. Math. 6tes Buch §. 7, 11. Siebeck Crelle J. 62 p. 155.

**) Lagrange l. c. 24.

Durch diese Substitution erhält man für p_1, p_2, p_3

$$\frac{2 f_1 p_1}{\sin xyz} = \xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z$$

$$\frac{2 f_2 p_2}{\sin xyz} = \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z$$

$$\frac{2 f_3 p_3}{\sin xyz} = \xi_3 x + \eta_3 y + \zeta_3 z$$

und umgekehrt

$$\tfrac{1}{2} x V \sin xyz = f_1 p_1 x_1 + f_2 p_2 x_2 + f_3 p_3 x_3$$

$$\tfrac{1}{2} y V \sin xyz = f_1 p_1 y_1 + f_2 p_2 y_2 + f_3 p_3 y_3$$

$$\tfrac{1}{2} z V \sin xyz = f_1 p_1 z_1 + f_2 p_2 z_2 + f_3 p_3 z_3 .$$

Vermöge der Gleichung $\mu + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ ist

$$fp + f_1 p_1 + f_2 p_2 + f_3 p_3 = \tfrac{1}{2} V \sin xyz ,$$

wodurch p von p_1, p_2, p_3 abhängig gemacht wird.

Wenn insbesondere P das Centrum einer die Tetraederflächen berührenden Kugel ist, so sind die absoluten Werthe von p, p_1, p_2, p_3 einander gleich. Haben bei einem innern Punkt des Tetraeders p, p_1, p_2, p_3 einerlei Zeichen und den gemeinschaftlichen Werth ϱ, so findet man für die eingeschriebene Kugel im engern Sinne

$$(f + f_1 + f_2 + f_3)\varrho = \tfrac{1}{2} V \sin xyz$$

$$(f + f_1 + f_2 + f_3) x = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3$$

$$(f + f_1 + f_2 + f_3) y = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3$$

$$(f + f_1 + f_2 + f_3) z = f_1 z_1 + f_2 z_2 + f_3 z_3 .$$

Durch die möglichen Zeichenwechsel von p_1, p_2, p_3 findet man 8 Radien und 8 dazu gehörige Centren, welche im Allgemeinen endliche Grössen und Entfernungen haben, für ebensoviel die Ebenen der Tetraederflächen berührende Kugeln.

8. Die Relationen, welche zwischen den Coordinaten g_1, $g_2 \cdot g_3$ oder h_1, h_2, h_3 (6) des Punktes P und den Coordinaten μ_1, μ_2, μ_3 oder $p_1, p_2 \cdot p_3$ (7) desselben stattfinden*), ergeben sich, wenn man die §. 15, 7 für x, y, z gefundenen Werthe in den für h_1, h_2, h_3 erhaltenen Formeln substituirt. In der Formel

*) Lagrange l. c. 26.

$$h_1 = \mu_1(x_1 X_1 + y_1 Y_1 + z_1 Z_1) + \mu_2(x_2 X_1 + y_2 Y_1 + z_2 Z_1)$$
$$+ \mu_3(x_3 X_1 + y_3 Y_1 + z_3 Z_1)$$

hat der Coefficient von μ_1 den Werth $OA^2 = a_{11}$, der Coefficient von μ_2 den Werth $OA \cdot OB \cos AOB = a_{12}$ u. s. w. (vergl. den Beweis §. 15, 4). Man erhält demnach

$$h_1 = \mu_1 a_{11} + \mu_2 a_{12} + \mu_3 a_{13}$$
$$h_2 = \mu_1 a_{12} + \mu_2 a_{22} + \mu_3 a_{23}$$
$$h_3 = \mu_1 a_{13} + \mu_2 a_{23} + \mu_3 a_{33}.$$

Anstatt die Determinante zu entwickeln, welche man $= 0$ setzen muss, um h zu bestimmen (6), kann man unmittelbar wie vorhin

$$h = xX + yY + zZ$$

setzen und erhält

$$h = \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \mu_3 h_3$$
$$= \mu_1^2 a_{11} + \mu_2^2 a_{22} + \mu_3^2 a_{33} + 2\mu_1\mu_2 a_{12} + 2\mu_1\mu_3 a_{13} + 2\mu_2\mu_3 a_{23}.$$

Umgekehrt hat man (§. 16, 7. §. 8, 1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = V^2 \sin^2 xyz\,,$$

$$\mu_1 V^2 \sin^2 xyz = h_1 \alpha_{11} + h_2 \alpha_{12} + h_3 \alpha_{13}$$
$$\mu_2 V^2 \sin^2 xyz = h_1 \alpha_{12} + h_2 \alpha_{22} + h_3 \alpha_{23}$$
$$\mu_3 V^2 \sin^2 xyz = h_1 \alpha_{13} + h_2 \alpha_{23} + h_3 \alpha_{33}\,,$$

wenn $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots$ die Coefficienten von $a_{11}, a_{12}, \ldots$ in der für $V^2 \sin^2 xyz$ angegebenen Determinante sind.

Aus diesen Relationen ergeben sich die übrigen durch die Substitutionen

$$\mu_1 V \sin xyz = 2 f_1 p_1 \quad \text{u. s. f. (7)}$$

$$a_{11} = 4 f_1^2, \quad a_{12} = 4 f_1 f_2 \cos_{12} \quad \text{u. s. f. (§. 16, 3. §. 16, 16)}$$

nämlich

$$\tfrac{1}{2} h_1 V \sin xyz = f_1 p_1 a_{11} + f_2 p_2 a_{12} + f_3 p_3 a_{13}$$
$$\tfrac{1}{2} h_2 V \sin xyz = f_1 p_1 a_{12} + f_2 p_2 a_{22} + f_3 p_3 a_{23}$$
$$\tfrac{1}{2} h_3 V \sin xyz = f_1 p_1 a_{13} + f_2 p_2 a_{23} + f_3 p_3 a_{33}$$

$$\tfrac{1}{4} h V^2 \sin^2 xyz = f_1^2 p_1^2 a_{11} + f_2^2 p_2^2 a_{22} + f_3^2 p_3^2 a_3$$
$$+ 2 f_1 f_2 p_1 p_2 a_{12} + 2 f_1 f_3 p_1 p_3 a_{13} + 2 f_2 f_3 p_2 p_3 a_{23}\,,$$

und umgekehrt

$$\tfrac{1}{2} p_1 V \sin xyz = h_1 f_1 \qquad + h_2 f_2 \cos_{12} + h_3 f_3 \cos_{13}$$
$$\tfrac{1}{2} p_2 V \sin xyz = h_1 f_1 \cos_{12} + h_2 f_2 \qquad + h_3 f_3 \cos_{23}$$
$$\tfrac{1}{2} p_3 V \sin xyz = h_1 f_1 \cos_{13} + h_2 f_2 \cos_{23} + h_3 f_3 \,.$$

9. Die Beziehung zwischen 4 Punkten eines Kreises A, B, C, D kann durch die Eigenschaften der Winkel, Strecken, Flächen, welche durch die betrachteten Punkte bestimmt sind, angegeben werden. Nach dem bekannten in EUCLIDES' Elementen enthaltenen Theorem ist die Winkeldifferenz $ACB - ADB$ entweder 0 oder 180^0, mithin allgemein

$$\text{(I)} \qquad 2(ACB - ADB) = 0 \text{ *)} ,$$

wenn die genannten Punkte auf einem Kreise liegen und Winkel von gleichen Zeichen durch Drehungen von einerlei Sinn beschrieben werden. Der Winkel 360^0 ist gleichbedeutend mit 0.

Nach dem Theorem des PTOLEMÄUS (Almagest I, 9) ist ferner

$$\text{(II)} \qquad \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 0 ,$$

wenn die Producte aus den Quadraten der gegenüberliegenden Strecken, welche 4 Kreispunkte A, B, C, D verbinden, durch p, q, r bezeichnet werden. Man findet aus dieser Gleichung die rationale Gleichung zwischen den Quadraten der Strecken, welche durch die genannten Punkte bestimmt sind. Eine der letztern analoge Gleichung lässt sich für die Quadrate der Strecken aufstellen, welche 5 Punkte einer Kugel verbinden.

Endlich kennt man die Relationen zwischen 4 Punkten eines Kreises oder 5 Punkten einer Kugel und einem beliebigen andern Punkte, wovon die letztere in einem Theorem FEUERBACH's (Untersuchung der dreieckigen Pyramide p. 15) enthalten ist, welches CAYLEY (Cambr. math. J. II p. 268) und LUCHTERHANDT (Crelle J. 23 p. 375) reproducirt haben. Dieselben Relationen hat MÖBIUS (Crelle J. 26 p. 26) aus baryeentrischen Principien abgeleitet. CAYLEY's Verfahren, das auf dem Gebrauch der Determinanten beruht, ist folgendes.

Die Punkte A, B, C, D eines Kreises seien in Bezug auf ein System orthogonaler Axen, dessen Anfang O ist, durch die

*) MÖBIUS Kreisverwandtschaft §. 14.

Coordinaten $x, y; x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ gegeben. Man hat, wie bekannt,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a + bx + cy \\ x_1^2 + y_1^2 &= a + bx_1 + cy_1 \\ &\cdots\cdots \\ x_3^2 + y_3^2 &= a + bx_3 + cy_3 \end{aligned}$$

folglich (§. 8, 3)

$$\text{III)} \quad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & 1 & x & y \\ x_1^2 + y_1^2 & 1 & x_1 & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_3^2 + y_3^2 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Die Entwickelung dieser Determinante nach §. 3, 2 mit Rücksicht auf §. 15, 5 giebt:

$$OA^2 . BCD - OB^2 . CDA + OC^2 . DAB - OD^2 . ABC = 0 .$$

Wenn man OP normal zur Kreisebene construirt und die Identität (§. 15, 5)

$$OP^2 (BCD - CDA + DAB - ABC) = 0$$

zu der vorigen Gleichung addirt, so kommt

$$\text{IV)} \quad PA^2 . BCD - PB^2 . CDA + PC^2 . DAB - PD^2 . ABC = 0 ,$$

worin P irgend einen Punkt des Raumes bedeutet. Insbesondere ist, wenn P mit D zusammenfällt,

$$DA^2 . BCD + DB^2 . CAD + DC^2 . ABD = 0 .$$

In gleicher Weise seien die Punkte A, B, C, D, E einer Kugel in Bezug auf ein System orthogonaler Axen durch die Coordinaten x, y, z; u. s. w. gegeben. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a + bx + cy + dz \\ &\cdots\cdots \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 &= a + bx_4 + cy_4 + dz_4 \end{aligned}$$

folgt

$$\text{V)} \quad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & 1 & x & y & z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Die Entwickelung dieser Determinante giebt (§. 15, 6)

$$\text{(VI)} \quad OA^2 . BCDE + OB^2 . CDEA + OC^2 . DEAB + OD^2 . EABC + OE^2 . ABCD = 0 ,$$

worin O irgend einen Punkt des Raumes bezeichnet. Nach den in §. 15, 7 angenommenen Bezeichnungen hat man

$$\mu_1 . OA^2 + \mu_2 . OB^2 + \mu_3 . OC^2 + \mu . OD^2 = OE^2 ,$$

d. h. wenn μ, μ_1, μ_2, μ_3 die coordinirten Coefficienten von E in Bezug auf die Pyramide $DABC$ sind, so ist für alle Punkte O auf einer um das Centrum E beschriebenen Kugel $\mu . OD^2 + \mu_1 . OA^2 + \mu_2 . OB^2 + \mu_3 . OC^2$ constant (Feuerbach). Insbesondere ist

$$AB^2 . CDEA + AC^2 . DEAB + AD^2 . EABC + AE^2 . ABCD = 0 ,$$

$$\mu_1 . DA^2 + \mu_2 . DB^2 + \mu_3 . DC^2 = DE^2 .$$

Wenn man die Determinanten (III) und (V) bezüglich mit

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 + y^2 & -2x & -2y \\ . & . & . & . \\ 1 & x_3^2 + y_3^2 & -2x_3 & -2y_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 + y^2 + z^2 & -2x & -2y & -2z \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & -2x_4 & -2y_4 & -2z_4 \end{vmatrix}$$

multiplicirt, so findet man $\Sigma \pm d_{00} \ldots d_{33}$ und $\Sigma \pm d_{00} \ldots d_{44}$ (§. 5, 1), wobei im ersten Falle

$$d_{00} = x^2 + y^2 + x^2 + y^2 - 2x^2 - 2y^2 = 0$$

$$d_{01} = x^2 + y^2 + x_1^2 + y_1^2 - 2xx_1 - 2yy_1 = AB^2$$

$$d_{02} = x^2 + y^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2xx_2 - 2yy_2 = AC^2$$

u. s. w., im zweiten Falle

$$d_{00} = x^2 + y^2 + z^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2 = 0$$

$$d_{01} = x^2 + y^2 + z^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1 = AB^2$$

u. s. w. Daher ist die oben erwähnte Gleichung zwischen den Strecken, welche 4 Punkte eines Kreises verbinden, folgende (Cayley):

$$\text{VII} \quad \begin{vmatrix} 0 & d_{01} & d_{02} & d_{03} \\ d_{01} & 0 & d_{12} & d_{13} \\ d_{02} & d_{12} & 0 & d_{23} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

worin d_{ik} das Quadrat der Strecke vom $i$ten bis zum $k$ten Punkte bedeutet.

Die analoge Gleichung zwischen den Strecken, welche 5 Punkte einer Kugel verbinden, lautet (Cayley):

$$\text{VIII} \quad \begin{vmatrix} 0 & d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} \\ d_{01} & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{02} & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ d_{04} & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Diese Determinanten können nach §. 3, 17 entwickelt werden.

10. Die gefundenen Relationen (III) bis (VIII) gelten für Punkte einer Ellipse oder Hyperbel, eines Ellipsoids oder Hyperboloids, wenn man jede Strecke nach dem parallelen halben Diameter misst *).

Beweis. Wenn an die Stelle der Kugel eine der genannten Flächen zweiten Grades tritt und die coordinirten orthogonalen Axen mit den Hauptaxen der Fläche parallel sind, so geht die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a + bx + cy + dz$$

in folgende über:

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \varepsilon_1\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = 1 + b'x + c'y + d'z\,,$$

worin ε, ε_1 positive oder negative Einheiten bedeuten. Daher erscheint in der Gleichung (V)

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \varepsilon_1\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2$$

statt $x^2 + y^2 + z^2$. Ist nun MA_1 der halbe Diameter der Fläche, welcher mit OA einerlei Richtung hat, sind ferner p, q, r die

*) Die Geltung der obigen Sätze für Ellipse und Ellipsoid hat Brioschi Crelle J. 50 p. 236 bemerkt.

Coordinaten von A_1 in Bezug auf die Hauptaxen der Fläche, so ergiebt sich aus elementaren Gründen

$$x : y : z : OA = p : q : r : MA_1 \,.$$

Weil aber, wie bekannt,

$$\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{q}{\beta}\right)^2 + \varepsilon_1\left(\frac{r}{\gamma}\right)^2 = 1$$

ist, so hat man *)

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \varepsilon_1\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = \frac{OA^2}{MA_1{}^2} \,.$$

Mithin kommen in (IV) und (VI) $\frac{OA^2}{MA_1{}^2}, \frac{OB^2}{MB_1{}^2}, \frac{OC^2}{MC_1{}^2}, \ldots$ an die Stelle von OA^2, OB^2, OC^2, .., während die übrigen Grössen unverändert bleiben.

Wenn man ferner die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z^2}{\gamma^2} & 1 & x & y & z \\ . & . & . & . & . \\ \frac{x_4{}^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y_4{}^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z_4{}^2}{\gamma^2} & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z^2}{\gamma^2} & -2\frac{x}{\alpha^2} & -2\varepsilon\frac{y}{\beta^2} & -2\varepsilon_1\frac{z}{\gamma^2} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & \frac{x_4{}^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y_4{}^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z_4{}^2}{\gamma^2} & -2\frac{x_4}{\alpha^2} & -2\varepsilon\frac{y_4}{\beta^2} & -2\varepsilon_1\frac{z_4}{\gamma^2} \end{vmatrix}$$

multiplicirt, so erhält man $\Sigma \pm d_{00} \ldots d_{44}$, worin

$$d_{00} = \left.\begin{array}{l} \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z^2}{\gamma^2} + \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z^2}{\gamma^2} \\ \quad -2\frac{x^2}{\alpha^2} - 2\varepsilon\frac{y^2}{\beta^2} - 2\varepsilon_1\frac{z^2}{\gamma^2} \end{array}\right\} = 0$$

$$\begin{aligned} d_{01} &= \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z^2}{\gamma^2} + \frac{x_1{}^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y_1{}^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z_1{}^2}{\gamma^2} \\ &\quad -2\frac{xx_1}{\alpha^2} - 2\varepsilon\frac{yy_1}{\beta^2} - 2\varepsilon_1\frac{zz_1}{\gamma^2} \\ &= \left(\frac{x-x_1}{\alpha}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{y-y_1}{\beta}\right)^2 + \varepsilon_1\left(\frac{z-z_1}{\gamma}\right)^2, \end{aligned}$$

*) Diese Eigenschaft ist von JOACHIMSTHAL Crelle J. 40 p. 32 angezeigt worden.

wofür man wie oben AB^2 dividirt durch das Quadrat des halben Diameters, der mit AB parallel ist, findet u. s. w.

11. Ein Kegelschnitt zweiten Grades ist durch einen seiner Brennpunkte O und 3 andere Punkte A, B, C bestimmt; daher müssen 4 Punkte eines Kegelschnitts und ein Brennpunkt desselben eine gewisse Relation haben. Die Rotationsfläche zweiten Grades, welche durch Rotation eines Kegelschnitts um seine Hauptaxe entsteht, ist durch einen ihrer Brennpunkte O und 4 andere Punkte A, B, C, D bestimmt, so dass eine Relation zwischen 5 Punkten einer solchen Fläche und einem ihrer Brennpunkte bestehen muss. Diese Relationen sind von Möbius (Crelle J. 26 p. 29) angegeben und bewiesen worden.

Man kann dieselben aus dem bekannten Satze ableiten, dass der Radius Vector $OA = r$ eines Kegelschnitts oder einer Rotationsfläche der angegebenen Art eine lineare Function der Coordinaten x, y oder x, y, z des Punktes A in Bezug auf beliebige Axen ist. Sind x_1, y_1 oder x_1, y_1, z_1 die Coordinaten von B u. s. w., so hat man

$$\begin{array}{ll} r = a + bx + cy & r = a + bx + cy + dz \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_3 = a + bx_3 + cy_3 & r_4 = a + bx_4 + cy_1 + dz_4 \end{array}$$

folglich (§. 8, 3)

$$\begin{vmatrix} r & 1 & x & y \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ r_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ r_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} r & 1 & x & y & z \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_4 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. (§. 15, 5. 6)

$$OA \,.\, BCD - OB \,.\, CDA + OC \,.\, DAB - OD \,.\, ABC = 0,$$

$$OA \,.\, BCDE + OB \,.\, CDEA + OC \,.\, DEAB$$
$$+ OD \,.\, EABC + OE \,.\, ABCD = 0.$$

Wenn A, B, C, D auf der Rotationsfläche und zugleich auf einer durch O gehenden Ebene liegen, so ist $ABCD = 0$ und

$$BCDE : -CDAE : DABE : -ABCE$$
$$= BCD : -CDA : DAB : -ABC,$$

folglich

$$OA \,.\, BCD - OB \,.\, CDA + OC \,.\, DAB - OD \,.\, ABC = 0 ,$$

d. h. die Rotationsfläche wird von einer durch einen ihrer Brennpunkte gelegten Ebene in einer Linie zweiten Grades geschnitten, für welche jener Punkt ein Brennpunkt ist (Möbius l. c.).

12. Die Relation zwischen den Strecken, welche 5 Punkte des Raumes verbinden, ist zuerst von Lagrange in einer wenig entwickelten Form aufgestellt, dann von Carnot wiederholt behandelt worden, ohne dass ein übersichtliches Resultat erreicht worden wäre (vergl. 3). Die einfachste Relation zwischen 5 Punkten des Raumes, A, B, C, D, E, deren Coordinaten in Bezug auf 3 beliebige Axen x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 u. s. w. sind, findet man, indem man die Identität (§. 2, 4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0$$

nach §. 3, 2 entwickelt und die gefundenen Determinanten 4ten Grades nach §. 15, 6 deutet, nämlich:

$$(1) \quad BCDE + CDEA + DEAB + EABC + ABCD = 0 ,$$

womit die in §. 15, 7 vorkommende bekannte Gleichung übereinstimmt. Wenn man die Volume der einzelnen Tetraeder durch ihre Kanten ausdrückt (§. 16, 14 Zusatz), so erhält man eine irrationale Gleichung, deren rechte Seite Null ist und deren linke Seite die Summe der Quadratwurzeln von 5 Determinanten 5ten Grades ist. Um diese Gleichung zu rationalisiren, hat man das Product aus den 16 Werthen zu bilden, welche die linke Seite vermöge der Zweideutigkeit von 4 unter jenen Quadratwurzeln annehmen kann*). Zur Auffindung eines rationalen Divisors der linken Seite genügt es aber schon, die Gleichung (1) mit einem ihrer Glieder zu multipliciren, weil das Product aus zwei Tetraedern eine rationale Function von den Quadraten

*) Vergl. Sylvester Cambr. and Dubl. math. J. 1853 Mai.

der Strecken ist, welche die Eckpunkte des einen Tetraeders mit denen des andern Tetraeders verbinden (§. 16, 14).

Dieser Divisor der Gleichung ist in einfacher Gestalt zuerst von Cayley (Cambr. math. J. 2 p. 268) direct entwickelt worden. Nach Analogie des in (9) mitgetheilten Verfahrens hat Cayley die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ . & . \quad . \quad . & . & . & . & . \\ 1 & x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 + u_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \end{vmatrix}$$

mit der Determinante

$$-16R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 & 1 & -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 & -2u_1 \\ . \quad . \quad . & . & . & . & . & . \\ x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 + u_5^2 & 1 & -2x_5 & -2y_5 & -2z_5 & -2u_5 \end{vmatrix}$$

multiplicirt. Man findet (§. 5, 4) $-16R^2 = \Sigma \pm h_{00} \ldots h_{55}$, worin $h_{ik} = h_{ki}$ (§. 6, 2) und zwar

$$h_{00} = h_{11} = \ldots = h_{55} = 0, \qquad h_{01} = h_{02} = \ldots = h_{05} = 1,$$

$$h_{12} = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2$$
$$- 2x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_2 - 2u_1u_2$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (u_1 - u_2)^2$$

u. s. w. Wenn die unbestimmten Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_5$ verschwinden, so verschwindet R (§. 3, 3). Versteht man dabei unter x_1, y_1, z_1 die orthogonalen Coordinaten des Punktes A u. s. w., so wird $h_{12} = AB^2$ u. s. w. Bezeichnet man die Quadrate der Strecken vom 1ten zum 2ten, 3ten, .. Punkte wie oben durch $d_{12}, d_{13}, \ldots,$ so hat man die Gleichung

$$\text{II,} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 & d_{45} \\ 1 & d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

für die Quadrate der Strecken, welche fünf Punkte des Raumes verbinden.

Man kann diese Determinante nach §. 3, 17 oder einfach nach §. 3, 3 entwickeln. In dem letztern Falle erhält man

$$\delta_{01} + \delta_{02} + \delta_{03} + \delta_{04} + \delta_{05} = 0 ,$$

wenn man die Coefficienten, welche die Elemente der ersten Zeile des Systems haben, durch δ_{01}, δ_{02}, .. bezeichnet. Bei analoger Bezeichnung ist aber (§. 6, 5)

$$\delta_{01}^2 : \delta_{02}^2 : \delta_{03}^2 : \delta_{04}^2 : \delta_{05}^2 = \delta_{11} : \delta_{22} : \delta_{33} : \delta_{44} : \delta_{55} ,$$

weil die Determinante verschwindet und $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ (§. 3, 13) ist. Folglich hat man bei einer bestimmten Auswahl der Zeichen

$$\sqrt{\delta_{11}} + \sqrt{\delta_{22}} + \sqrt{\delta_{33}} + \sqrt{\delta_{44}} + \sqrt{\delta_{55}} = 0 ,$$

womit nach §. 16, 14 die Gleichung (1) übereinstimmt.

Zusatz. Auf demselben Wege werden die Gleichungen zwischen den Quadraten der Strecken gefunden, welche 4 Punkte A, B, C, D einer Ebene und 3 Punkte A, B, C einer Geraden verbinden (§. 16, 13. 14). Es ist nämlich nach den angenommenen Bezeichnungen im ersten Falle

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

und bei gehöriger Zeichenbestimmung

$$\sqrt{\delta_{11}} + \sqrt{\delta_{22}} + \sqrt{\delta_{33}} + \sqrt{\delta_{44}} = 0$$

übereinstimmend mit $BCD - CDA + DAB - ABC = 0$ d. i.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0 ;$$

im zweiten Falle

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\sqrt{\delta_{11}} + \sqrt{\delta_{22}} + \sqrt{\delta_{33}} = 0 ,$$

übereinstimmend mit $AB + BC + CA = 0$ d. i.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Diese Gleichungen ergeben sich auch aus 9, VII und VIII. Wenn nämlich von 5 Punkten einer Kugel einer unendlich fern ist, so ist z. B.

$$\frac{d_{01}}{d_{01}} = \frac{d_{02}}{d_{01}} = \frac{d_{03}}{d_{01}} = \frac{d_{04}}{d_{01}} = 1 ,$$

und die übrigen 4 Punkte liegen auf einer Ebene. Und wenn von 4 Punkten eines Kreises einer unendlich fern ist, so liegen die übrigen 3 Punkte auf einer Geraden.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.









BINDING SECT. MAY 7 1968

QA 191 B35 1864 Baltzer, Richard
Theorie und Anwendung der Determinaten 2. verm. Aufl.

Physical & Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

